Wirtschaftsmathematik II
Hausaufgabe 5

Fotografieren/scannen Sie Ihre **handschriftlichen** Lösungen (mit Namen und Matrikelnummer) und laden Sie diese als **genau eine** PDF-Datei **bis Freitag, 16.06.2023, 23:00 Uhr** im OPAL-Kurs unter Hausaufgaben, 5. Hausaufgabe, hoch.

Der Lösungsweg muss mit Hilfe eines einfachen wissenschaftlichen Taschenrechners (nicht grafikfähig, nicht programmierbar, o.ä.), ohne Benutzung der SOLVE-Funktion, nachvollziehbar sein. Fragen sind mit einem Antwortsatz zu beantworten.

Aufgabe 1: Gegeben sei die Zahlenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = \dfrac{4\cdot(-1)^{k+1}}{k!}\cdot(3k)^k$.

(a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|$.

(b) Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent oder divergent? Begründen Sie kurz.

Aufgabe 2: Gegeben seien die Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}$ und die dazu gehörende Taylor-Reihe

$$T(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(k+1)}{5^{k+2}}(x+4)^k$$

mit der Entwicklungsstelle x_0.

(a) Geben Sie die Entwicklungsstelle x_0 an.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Taylor-Reihe.

(c) Gegeben seien die Stellen $x_1=-9$ und $x_2=9$. Welche Aussage über das Konvergenzverhalten der Taylor-Reihe an der jeweiligen Stelle können Sie basierend auf Ihren Ergebnissen aus den Teilaufgaben (a) und (b) treffen? Begründen Sie kurz.

(d) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom T_2 zweiten Grades der Funktion f an der Entwicklungsstelle x_0 aus Teilaufgabe (a).

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=(2e^{-x}-2)^2-1$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f. (Exakt, keine Näherungslösungen.)

(b) Berechnen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion und bestimmen Sie, ob es sich um eine Minimal- oder Maximalstelle handelt.

Aufgabe 1: Gegeben sei die Zahlenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = \frac{4\cdot(-1)^{k+1}}{k!}\cdot(3k)^k$.

(a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$.

(b) Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent oder divergent? Begründen Sie kurz.

a)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{4\cdot(-1)^{k+2}\cdot(3(k+1))^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{4\cdot(-1)^{k+1}\cdot(3k)^k}{k!}}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{4}\cdot(-1)^{k+2}\cdot(3(k+1))^{k+1}\cdot \cancel{k!}}{\cancel{4}\cdot\cancel{(-1)^{k+1}}\cdot(3k)^k\cdot\cancel{(k+1)!}}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)\cdot(3\cancel{(k+1)})}{\cancel{(k+1)}}\cdot\underbrace{\frac{(\cancel{3}(k+1))^k}{(\cancel{3}k)^k}}_{\to 1}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|-1\cdot 3\cdot 1\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}|-3| = \underline{\underline{3}}$$

b) Die Reihe ist divergent, da nach dem Quotientenkriterium die Reihe immer größer 1 bleibt.

Aufgabe 2: Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$ und die dazu gehörende Taylor-Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)}{5^{k+2}} \cdot (x+4)^k$$

mit der Entwicklungsstelle x_0.

(a) Geben Sie die Entwicklungsstelle x_0 an.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Taylor-Reihe.

(c) Gegeben seien die Stellen $x_1 = -9$ und $x_2 = 9$. Welche Aussage über das Konvergenzverhalten der Taylor-Reihe an der jeweiligen Stelle können Sie basierend auf Ihren Ergebnissen aus den Teilaufgaben (a) und (b) treffen? Begründen Sie kurz.

(d) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom T_2 zweiten Grades der Funktion f an der Entwicklungsstelle x_0 aus Teilaufgabe (a).

a) $x_0 = -4$

b) $a_n = \frac{2(k+1)}{5^{k+2}}$

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{2(k+1)}{5^{k+2}}}{\frac{2(k+2)}{5^{k+3}}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\cancel{2}(k+1)}{\cancel{2}(k+2)} \cdot \frac{5^{k+3}}{5^{k+2}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \underbrace{\frac{k \cdot (1+\overset{\to 0}{\frac{1}{k}})}{k \cdot (1+\underset{\to 0}{\frac{2}{k}})}}_{1} \cdot 5 \right|$$

$$1 \cdot 5$$

$= 5 > 1 \to$ divergent

c) Die Stelle $x = 9$ liegt außerhalb des Konvergenzradius und ist somit divergent.

Die Stelle $x = -9$ ist ein Randpunkt ausgehend vom Mittelpunkt $x_0 = -4$ und dem Konvergenzradius 5. Somit kann keine Aussage über den Punkt getätigt werden und müsste näher untersucht werden.

$$x = -9: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)}{5^{k+2}} (-9+4)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+2}{5^{k+2}} \cdot (-5)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+2}{5^{k+2}} \cdot (-5)^k$$

d) $T_2(x) = \frac{2}{25} + \frac{4}{125}(x+4)^1 + \frac{6}{625}(x+4)^2$

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (2e^{-x} - 2)^2 - 1$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f. (Exakt, keine Näherungslösungen.)

(b) Berechnen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion und bestimmen Sie, ob es sich um eine Minimal- oder Maximalstelle handelt.

a) Nullstellen bestimmen:

$0 = (2e^{-x} - 2)^2 - 1 \quad | +1$

$1 = (2e^{-x} - 2)^2 = 4e^{-2x} - 2 \cdot 2e^{-x} \cdot 2 + 4$

$1 = 4e^{-2x} - 8e^{-x} + 4 \quad | -4 \quad | :4$

$-\frac{3}{4} = 1e^{-2x} - 2e^{-x} \quad | \ln()$

$x_{n_1} = -0{,}4054 \qquad x_{n_2} = 0{,}69314$

b) Extremstellen

$f'(x) = 2 \cdot (2e^{-x} - 2) \cdot 2e^{-x}$

$= 4e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 2)$

$0 = 4e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 2)$

$0 = 8e^{-2x} - 8e^{-x} \quad | :8$

$0 = e^{-2x} - e^{-x} \quad | +e^{-x}$

$e^{-x} = e^{-2x} \quad | \ln()$

$-x = -2x$

$\underline{\underline{x_0 = 0}}$

$$f''(x) = 4e^{-x} \cdot -1 \cdot (2e^{-x} - 2) + 4e^{-x} \cdot (2e^{-x}$$

$$= -4e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 2) + 8e^{-x}$$

$$f''(x_0) = -4e^{-0} \cdot (2e^{-0} - 2) + 8e^{-0}$$

$$= 8 > 0 \quad \Rightarrow \text{Extremstelle : lokales Minimum}$$

$$f(x_0) = (2e^{-0} - 2)^2 - 1 = -1$$

$$\underline{\underline{\text{Minimum } (0 \mid -1)}}$$