

Themenblock 1

Aufgaben mit Lösungshilfe Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1. Es seien X die Menge aller Studenten eines Studiengangs, Y die Menge aller Fächer. Die Aussageform $m(x, y)$ bedeute: Der Student x aus X mag das Fach y aus Y .

Betrachtet werden die folgenden Aussagen:

$$\begin{array}{ll}
 a & :\Leftrightarrow (\forall x \forall y : m(x, y)) & b & :\Leftrightarrow (\forall y \forall x : m(x, y)) \\
 c & :\Leftrightarrow (\forall x \exists y : m(x, y)) & d & :\Leftrightarrow (\exists y \forall x : m(x, y)) \\
 e & :\Leftrightarrow (\exists x \forall y : m(x, y)) & f & :\Leftrightarrow (\forall y \exists x : m(x, y)) \\
 g & :\Leftrightarrow (\exists x \exists y : m(x, y)) & h & :\Leftrightarrow (\exists y \exists x : m(x, y))
 \end{array}$$

- (a) Geben Sie sprachliche Formulierungen der Aussagen a, \dots, h an.
- (b) Entscheiden und begründen Sie, welche Beziehungen (\Rightarrow , \Leftrightarrow) zwischen den Aussagen a und b , c und d , e und f bzw. g und h bestehen.
- (c) Negieren Sie die Aussagen c , d , e und f und geben sprachliche Formulierungen dieser Negationen an.

Aufgabe 2. Stellen Sie die folgenden Aussagen mit Quantoren dar und geben Sie deren Wahrheitsgehalt an (mit Begründung).

- (a) Es existiert eine kleinste natürliche Zahl.
- (b) Für jede reelle Zahl x gibt es eine reelle Zahl y mit der Eigenschaft: $x = (y - 4)^2 + 2$.
- (c) Jede positive reelle Zahl ist das Quadrat einer anderen reellen Zahl.
- (d) Für je zwei reelle Zahlen x und y existiert eine reelle Zahl welche kleiner als y und größer als x ist.
- (e) Für je zwei reelle Zahlen x und y mit $x < y$ existiert eine reelle Zahl z welche kleiner als y und größer als x ist.

Aufgabe 3. Man beweise indirekt, dass folgende reelle Zahlen nicht rational (irrational) sind:

- (a) $\sqrt{6}$
- (b) $\log_2 5$

Aufgabe 4. Zeigen Sie (z. B. unter Verwendung der binomischen Formeln), dass folgende Behauptungen wahr sind.

- (a) Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) ist wieder gerade.
- (b) Ist $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade natürliche Zahl, so ist n^2 wieder ungerade.
- (c) Für jede ungerade Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist n^3 eine ungerade natürliche Zahl.

Aufgabe 5. Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass es sich bei der nachstehenden logischen Verknüpfung um eine Tautologie handelt.

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad (1)$$

Aufgabe 6. Die Mengen A_1 , A_2 und A_3 seien durch

$$A_i = \{1 + 2i, 2 + 2i, 3 + 2i, 4 + 2i, 5 + 2i\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

definiert.

- (a) Geben Sie jeweils die Elemente der Mengen A_1 , A_2 und A_3 (ohne Verwendung des Index i) an.
 (b) Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

$$(i) A_1 \cup A_2, \quad (ii) A_2 \setminus A_3, \quad (iii) \bigcap_{i=1}^3 A_i, \quad (iv) \{x \in A_1 \mid 2x \in A_3\}.$$

Hinweis: Die Vereinigung und der Durchschnitt von Mengen A_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ kann auch für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$ definiert werden

$$\bigcup_{i=1}^n A_i := (\dots((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup \dots \cup A_n)$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i := (\dots((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \cap \dots \cap A_n)$$

Diese Operationen sind für $n > 2$ ebenso kommutativ und assoziativ.

Aufgabe 7.

Zeigen Sie die folgenden Mengenbeziehungen:

$$(a) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (b) (A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$$

$$(c) (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

Nutzen Sie bei (c) die Äquivalenz $((x, y) \in A \times B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B)$.

Aufgabe 8.

- (a) Zeigen Sie die Rekursionsformel für den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

für $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Nutzen Sie dafür die Definition über Fakultäten.

- (b) Beweisen Sie den Binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

für $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der vollständigen Induktion und der Rekursionsformel aus (a).

Aufgabe 9. Schreiben Sie mithilfe des Summenzeichens (Σ).

$$(a) 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100} \quad (c) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{100}$$

$$(b) 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots + 10x^9 \quad (d) (2y)^{\frac{1}{2}} + (4y)^{\frac{1}{3}} + (6y)^{\frac{1}{4}} + \dots + (50y)^{\frac{1}{26}}$$

Aufgabe 10. Transformieren Sie den Index k in

$$\sum_{k=6}^{12} \frac{1}{3+k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{21} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=4}^{24} \frac{1}{k-2} \quad (2)$$

so dass (jeweils)

- (a) von $i = 1$ ab summiert wird, (b) über $\frac{1}{m}$ summiert wird.

Berechnen Sie ferner die in (3) aufgeführte Differenz.

Aufgabe 11. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Selbständige Bearbeitung Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 12. Weisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen die Äquivalenz der folgenden Aussageverbindngen nach.

Es seien p und q zwei Aussagen. Dann gelten:

(a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

(Regeln von De Morgan).

Aufgabe 13. Eine nichtendliche Folge x_0, x_1, x_2, \dots reeller Zahlen heißt *konvergent gegen eine reelle Zahl x* , wenn folgende Aussage a wahr ist:

$$a \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon \quad (3)$$

- (a) Formulieren Sie a sprachlich und veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt auf der Zahlengeraden.
 (b) Bilden Sie die Negation von a entsprechend (3) mit Hilfe von Quantoren. Formulieren Sie die Negation sprachlich.

Aufgabe 14. Gegeben sind jeweils zwei Aussagen a und b für eine reelle Zahl x . Gilt dann $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow a$ oder sogar $a \Leftrightarrow b$?

	(a)	(b)	(c)	(d)
$a :$	$x^2 = 4$	$x^2 + x = 0$	$2(x-1)(x-2) = 0$	$x > 2$
$b :$	$ x = 2$	$x + 1 = 0$	$x = 1 \vee x = 2$	$x^2 > 4$

Aufgabe 15. Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 7\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x^2 < 9\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| > 3\} \quad \text{und} \\ D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x - 1 \leq 4\}.$$

Stellen Sie die Mengen A , B , C und D sowie die nachfolgend aufgeführten Mengen dar:

(a) in Intervallschreibweise, ggf. als Vereinigung mehrerer Intervalle

(b) auf der (reellen) Zahlengeraden.

(i) $A \cap D$ (ii) $A \cup B \cup C \cup D$ (iii) $D \setminus B$ (iv) $B \setminus C$ (v) $(A \cup B) \setminus C$.

Aufgabe 16. Die Symbole \cup und \cap aus der Mengenlehre haben nicht nur optisch eine enge Verwandtschaft zu den Symbolen \vee und \wedge aus der Logik. So gilt beispielsweise für zwei Mengen A und B :

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \wedge (x \in B).$$

Finden Sie in diesem Sinne äquivalente Formulierungen für die folgenden Ausdrücke:

(a) $x \in (A_1 \cup A_2)$

(d) $x \in A_1 \setminus A_2$

(b) $x \in ((A_1 \cap A_2) \cup \bar{A}_3)$

(e) $(x \in A_1) \wedge ((x \in A_2) \vee (x \in A_3))$

(c) $x \notin \bigcup_{i=1}^n A_i$

(f) $(x \in A_1) \vee (x \notin A_2) \vee (x \in \bar{A}_3)$

Aufgabe 17. Es sei

$$A_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie $\bigcap_{i=1}^n A_i$ und $\bigcup_{i=1}^n A_i$ sowie $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

Aufgabe 18. Wir betrachten hier eine Menge M und Teilmengen $A_1, \dots, A_n \subseteq M$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Formulieren Sie die folgenden Aussagen unter Verwendung geeigneter Quantoren und geeigneter mathematischer Symbole.

(i) Der Schnitt zweier beliebiger Mengen aus A_1, \dots, A_n ist wieder eine Menge aus A_1, \dots, A_n .

(ii) Es existieren 2 Mengen aus A_1, \dots, A_n , welche disjunkt sind.

Hinweis: Es ist nützlich, die Menge der Indizes $I := \{1, \dots, n\}$ zu verwenden.

(b) Geben Sie eine Menge M und Teilmengen A_1, \dots, A_n an, so dass alle Aussagen aus (a) wahr sind. Begründen Sie, weshalb die Aussagen für Ihr Beispiel gelten.

Aufgabe 19. Gegeben seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5\}$. Bilden Sie die folgenden Mengen:

(a) $A \times B$

(c) A^2

(b) $B \times A$

(d) $B \times A \times B$

Aufgabe 20. Berechnen Sie die folgenden Summen ($n \in \mathbb{N}^*$, $a \neq 0$).

(a) $\sum_{i=1}^n 2k$

(c) $\sum_{k=1}^n (4k + 1)$

(e) $\sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^5 j$

(b) $\sum_{k=1}^n a^{2k}$

(d) $\sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^5 (j - k)$