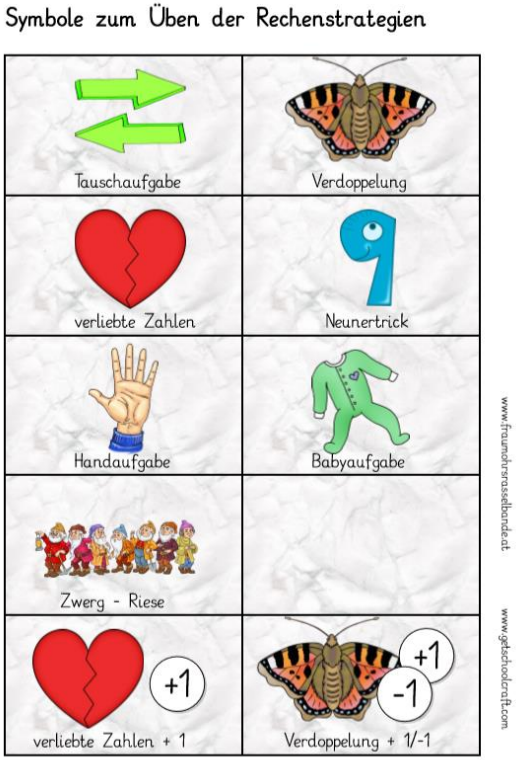
ZLB Zentrum für Lehrerbildung

Didaktik der Arithmetik

- Vorlesung Vertiefungsmodul LAGS-GSD-MA-VM1



8. Rechengesetze und Strategien

Grundschuldidaktik Mathematik
Prof. Dr. phil. Birgit Brandt
Wintersemester 2024/25

Rechengesetze und Kopfrechenstrategien begründen

Kommutativgesetz (Tauschaufgaben)

- gilt in allen Zahlbereichen für die Addition und Multiplikation

Für alle reellen Zahlen a und b gilt:
$a + b = b + a$
$a \times b = b \times a$

Beispiele Grundschule:

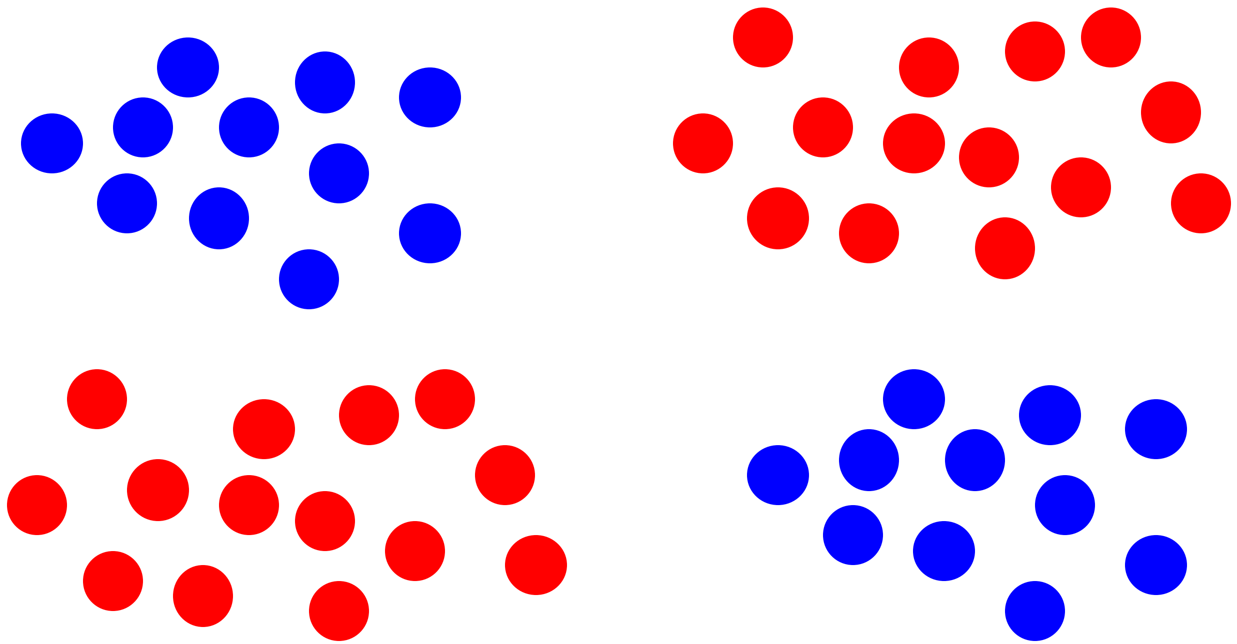
$3 + 4 = 4 + 3$
$3 \times 4 = 4 \times 3$

- gilt offensichtlich nicht für die Umkehroperationen (Subtraktion und Division)

$$4 - 3 \neq 3 - 4$$
$$12 : 4 \neq 4 : 12$$

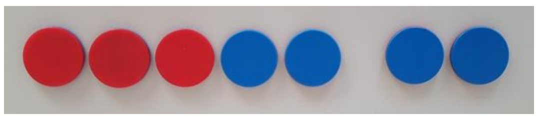
Kommutativgesetz (Tauschaufgaben)

- Grundlegend: Invarianz der Anzahl
  Lageveränderung verändert nicht die Anzahl

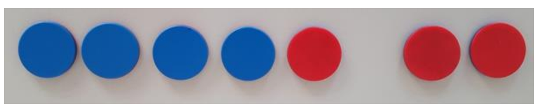


Kommutativgesetz (Tauschaufgaben)

- Visualisierungsmöglichkeiten für die Addition

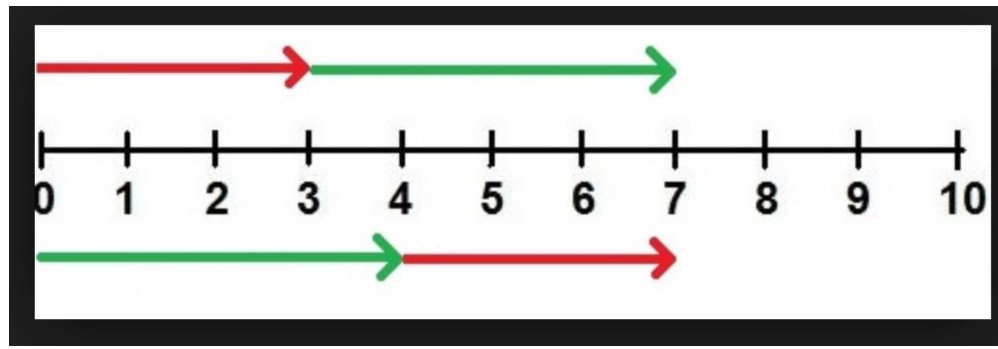


3 + 4 = 7



4 + 3 = 7

Eigene Abbildung



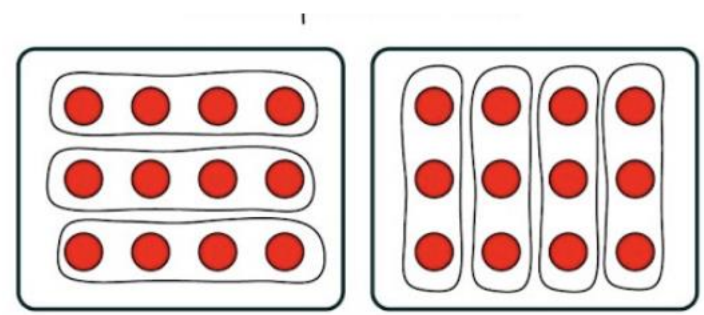
https://www.gut-erklaert.de/mathematik/kommutativgesetz-erklaerung-beispiele.html

Dynamische Sachgeschichten:
Lisa legt erst 3 Kastanien und dann 4 Kastanien auf den Tisch, Yunus erst 4 Kastanien, dann 3 Kastanien. Wer hat mehr Kastanien auf den Tisch gelegt?

Kommutativgesetz (Tauschaufgaben)

- Begründungsstrategie Multiplikation
  - Die Gesamtzahl der Punkte ändert sich nicht durch die Veränderung des Blickwinkels. Wir sehen 3 Reihen mit 4 Muffins, oder 4 Reihen mit 3 Muffins. Daher gilt 3×4=4×3.
  - Diese Argumentation für die Gleichheit von Aufgabe und Tauschaufgabe gilt offenbar nicht nur für die speziellen Zahlen 3 und 4.

Duden 3



Assoziativgesetz

- gilt in allen Zahlbereichen für die Addition und Multiplikation

  Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:
  $(a + b) + c = a + (b + c)$
  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

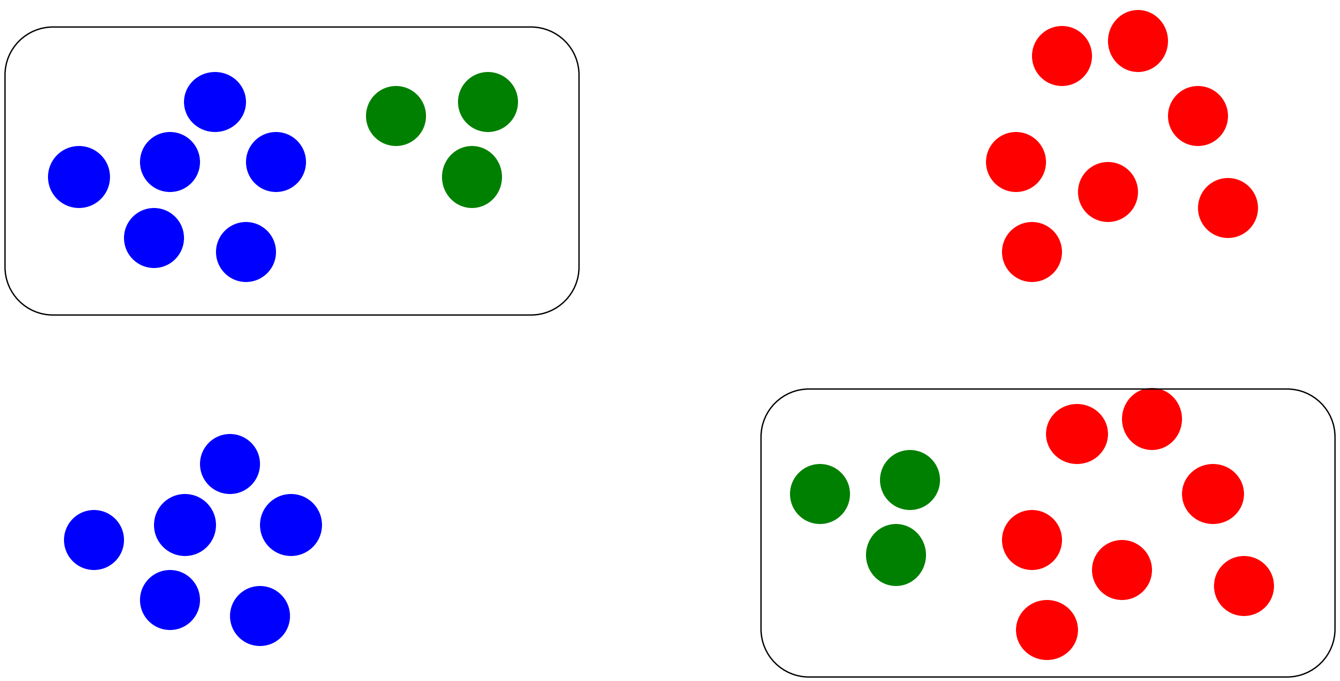
  Beispiele Grundschule:
  $(3 + 4) + 6 = 3 + (4 + 6)$
  $(3 \times 4) \times 5 = 3 \times (4 \times 5)$

- gilt offensichtlich nicht für die Umkehroperationen (Subtraktion und Division)

  $(6 - 3) - 2 \neq 6 - (3 - 2)$
  $(24 : 4) : 2 \neq 24 : (4 : 2)$

Assoziativgesetz: Addition

- Grundlegend: Invarianz der Anzahl



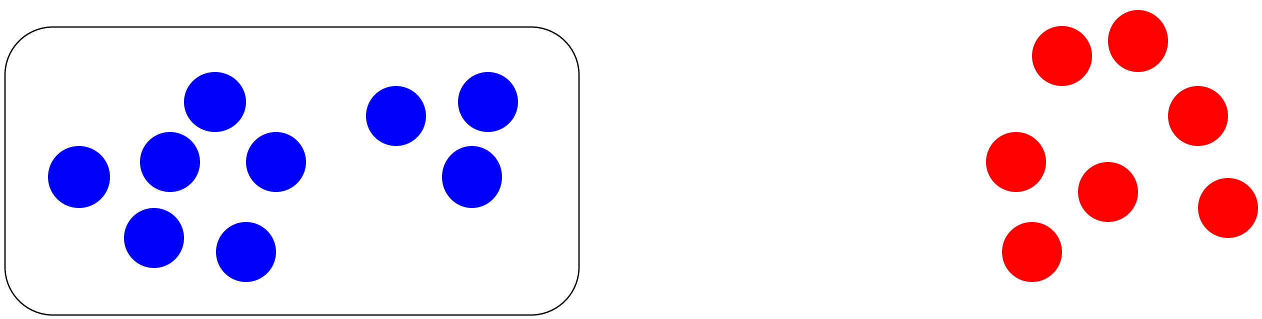
$(6 + 3) + 7$

$6 + (3 + 7)$

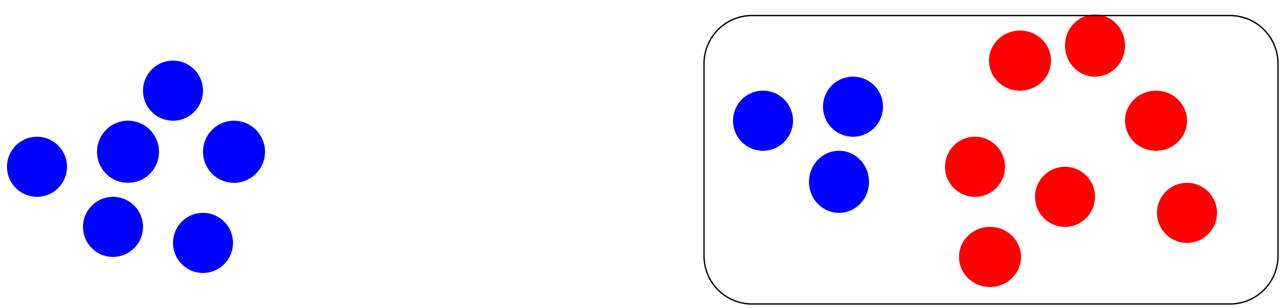
$6 + 3 + 7$

Assoziativgesetz: Addition

- Grundlegend: Invarianz der Anzahl



$(6 + 3) + 7$

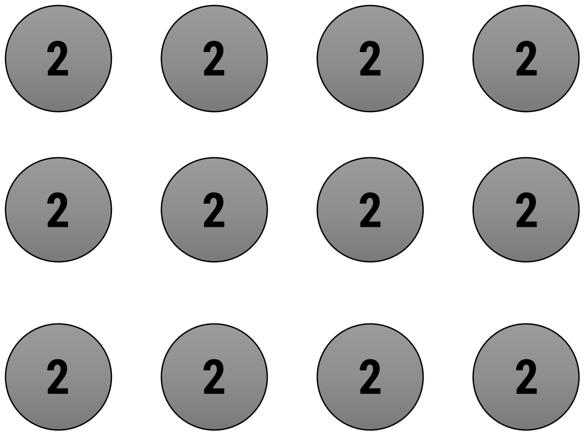


$6 + (3 + 7)$

$9 + 7 = 6 + 10$

Assoziativgesetz: Multiplikation

- Es werden 3 Reihen mit jeweils 4 Münzen à 2 Euro gelegt. Wie viel Euro liegen auf dem Tisch?



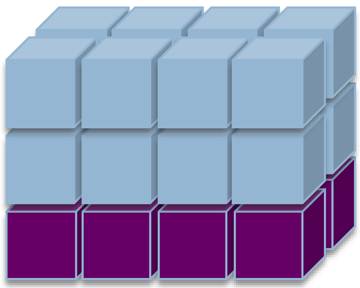
(3 x 4) x 2 = 3 x (4 x 2)

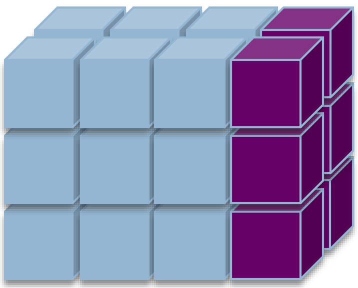
3 x 4 x 2 = 3 x 2 x 4

- Es sind insgesamt zwölf Münzen (3x4) à 2 €.
- Es sind 3 Reihen und in jeder Reihe liegen 8 € (4x2).
- Und was ist mit: Es sind 4 Spalten. In jeder Spalte liegen 6 Euro.

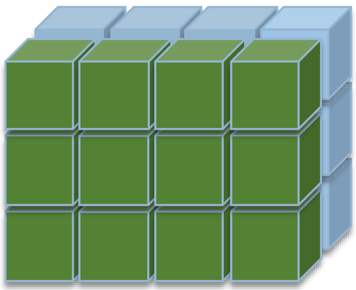
Assoziativgesetz: Multiplikation

- Auf ein 4x2-Feld stellen wir auf jedes Feld 3 Würfel. Wir können nun auf verschiedene Weise „verkürzt“ zählen:
  - Grundfläche x Höhe: (4 x 2) x 3 *(oder: 8 Türme der Höhe 3)*
  - Seitenansicht x Breite: 4 x (2 x 3)



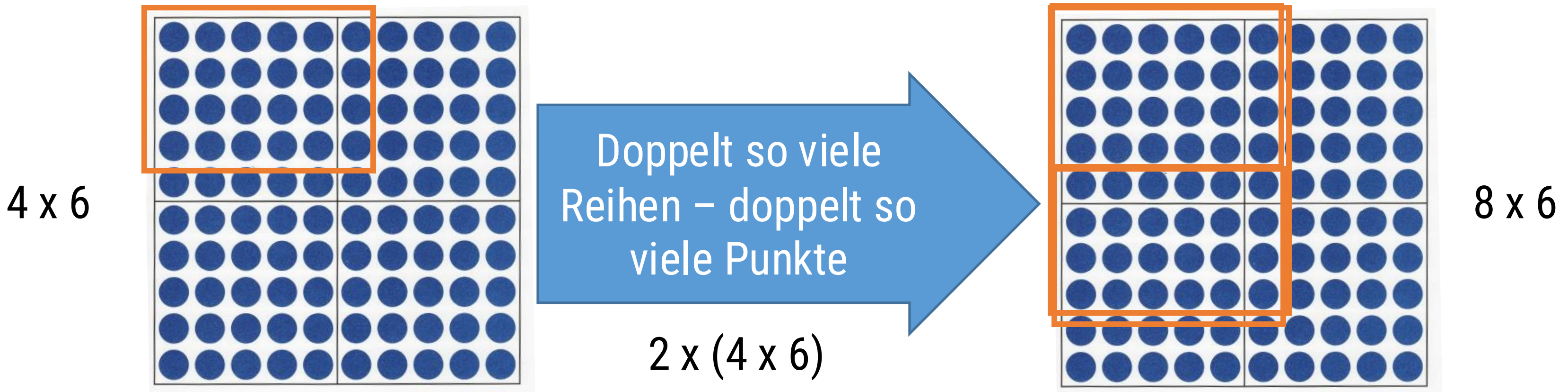


  - Und was ist mit Vorderansicht x Tiefe?



Assoziativgesetz: Multiplikation

- Die Spezialfälle Verdoppeln und Halbieren spielen bei der Erarbeitung des kleinen Einmaleins eine wichtige Rolle.
  - Verdoppelt man in einem Produkt *einen* Faktor, so verdoppelt man das Produkt insgesamt.
  - Halbiert man in einem Produkt *einen* Faktor, so halbiert man das Produkt insgesamt.
- Spezialfälle am Hunderterpunktfeld



Distributivgesetz

- gilt in allen Zahlbereichen für die Multiplikation in Verbindung mit der Addition und der Subtraktion **von links und rechts**

Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:

$a \times (b + c) = ab + ac$ $\quad$ $(b + c) \times a = ab + ac$

$a \times (b - c) = ab - ac$ $\quad$ $(b - c) \times a = ab - ac$

Beispiele Grundschule:

$3 \times (4 + 6) = 3 \times 4 + 3 \times 6$

$(4 - 3) \times 5 = 4 \times 5 - 3 \times 5$

- gilt in allen Zahlbereichen für die Division in Verbindung mit der Addition und der Subtraktion **von rechts**

Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:

$(b + c) : a = b : a + c : a$

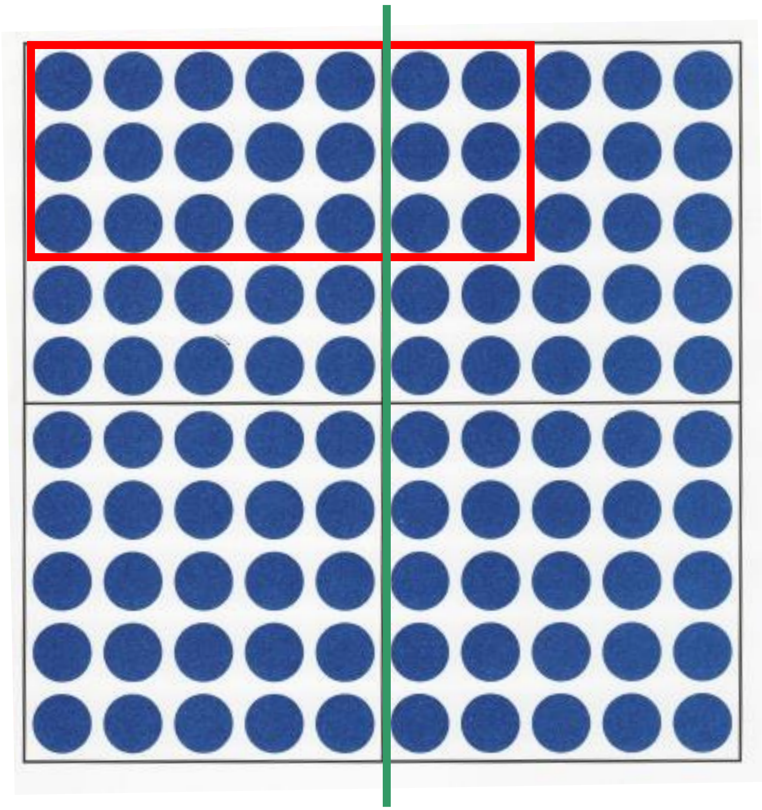
$(b - c) : a = b : a - c : a$

Beispiele Grundschule:

$(16 + 12) : 4 = 16 : 4 + 12 : 4$

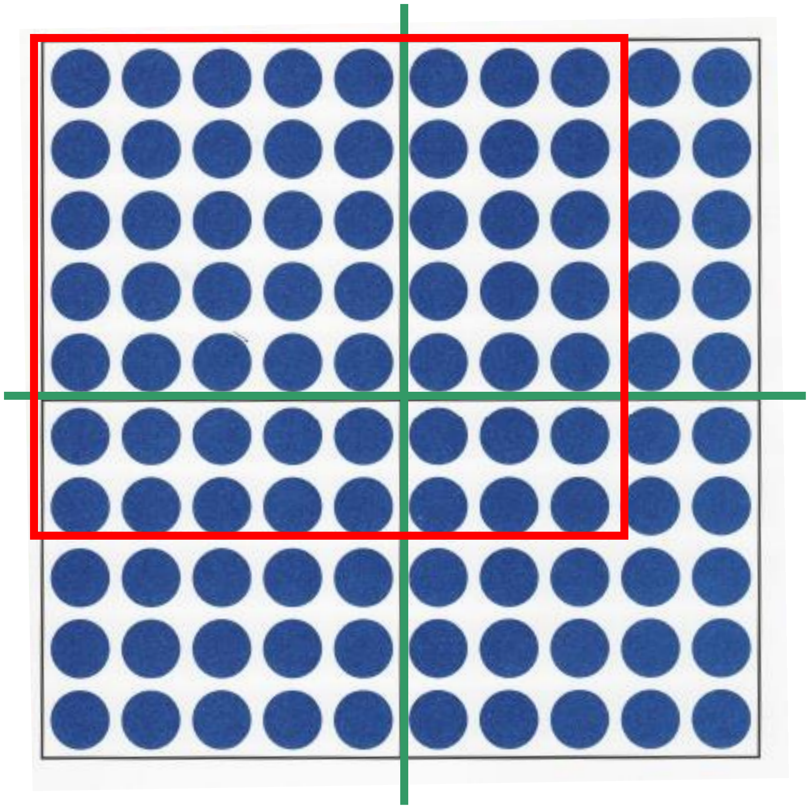
$(16 - 12) : 4 = 16 : 4 - 12 : 4$

Distributivgesetz – Multiplikation



$$3 \times 7 = 3 \times (5+2)$$
$$= 3 \times 5 + 3 \times 2$$

Distributivgesetz – Multiplikation

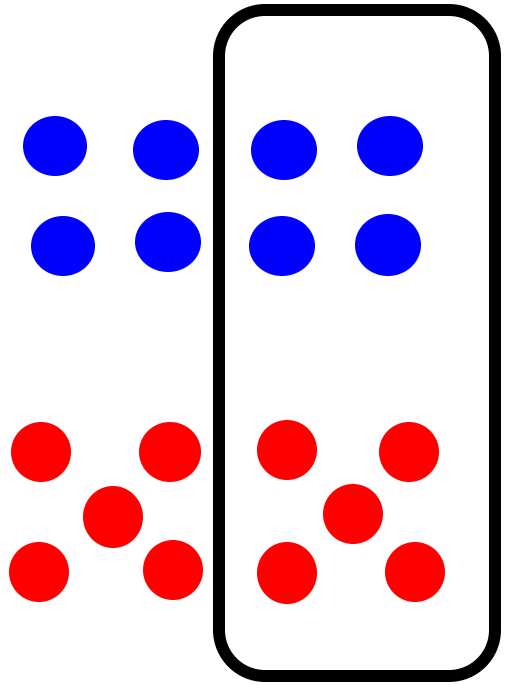


$7 \times 8 = (5+2) \times (5+3)$

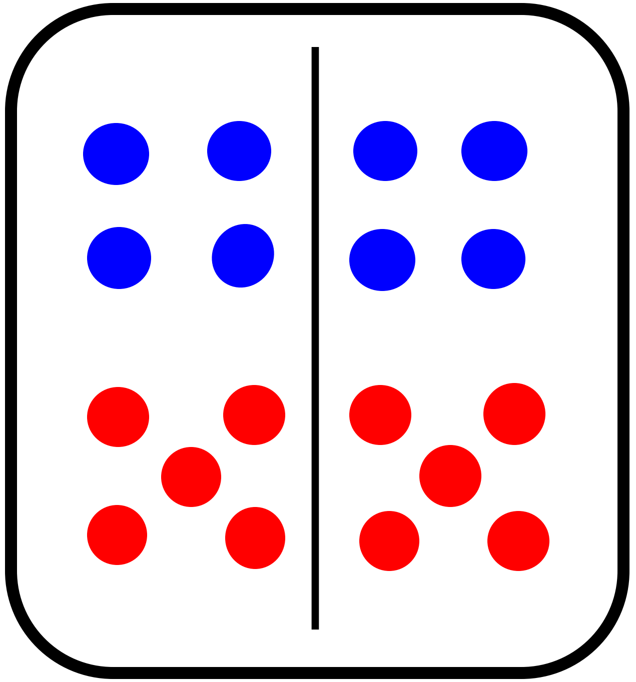
$= 5\times5 + 2\times5 + 5\times3 + 2\times3$

Distributivgesetz – Division

Spezialfall: Halbieren

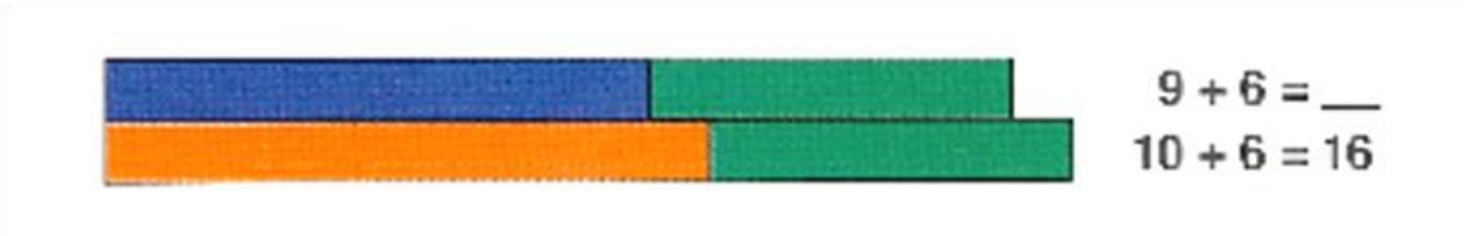


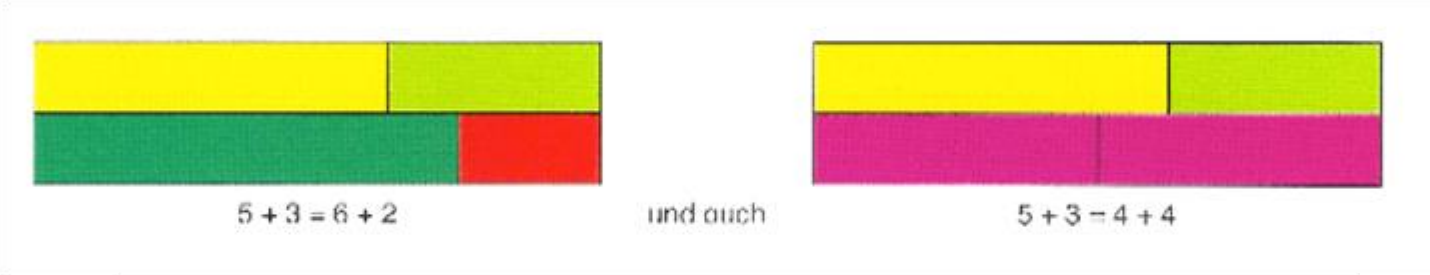
8:2 + 10:2



(8 + 10) : 2

Farbige Stäbe (Maßzahlaspekt)





Farbige Stäbe Kartei

Heuristische Strategien

Rechenstrategien

- Tauschaufgaben
- Analogieaufgaben
- Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben
- Fastverdoppelungs- und Fasthalbierungsaufgaben
- Nachbaraufgaben
- Schrittweises Rechnen
- Gegensinniges und gleichsinniges Verändern
- Stellenweises Rechnen

Heuristische Strategien

$479 + 135$
$634 - 378$
9×38
$234 : 6$

Versuchen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Wegen zu lösen – greifen Sie dabei nicht auf die algorithmischen Standardverfahren zurück!

Analogieaufgaben

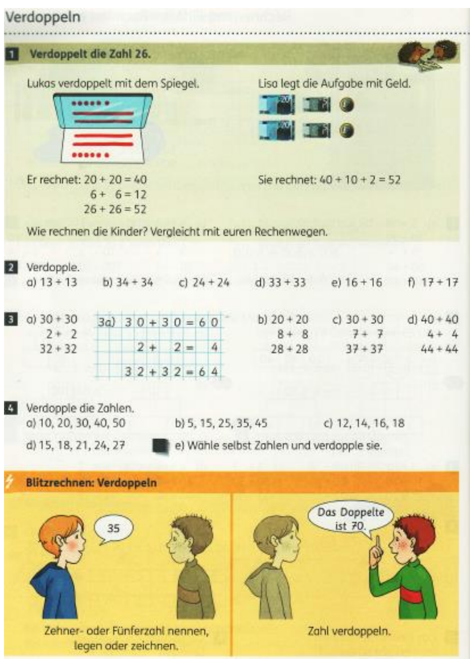
- 5 + 2 = 7 und 15 + 2 = 17
- 2 + 3 = 5 und 20 + 30 = 50

- 9 − 3 = 6 und 19 − 3 = 16
- 7 − 4 = 3 und 70 − 40 = 30

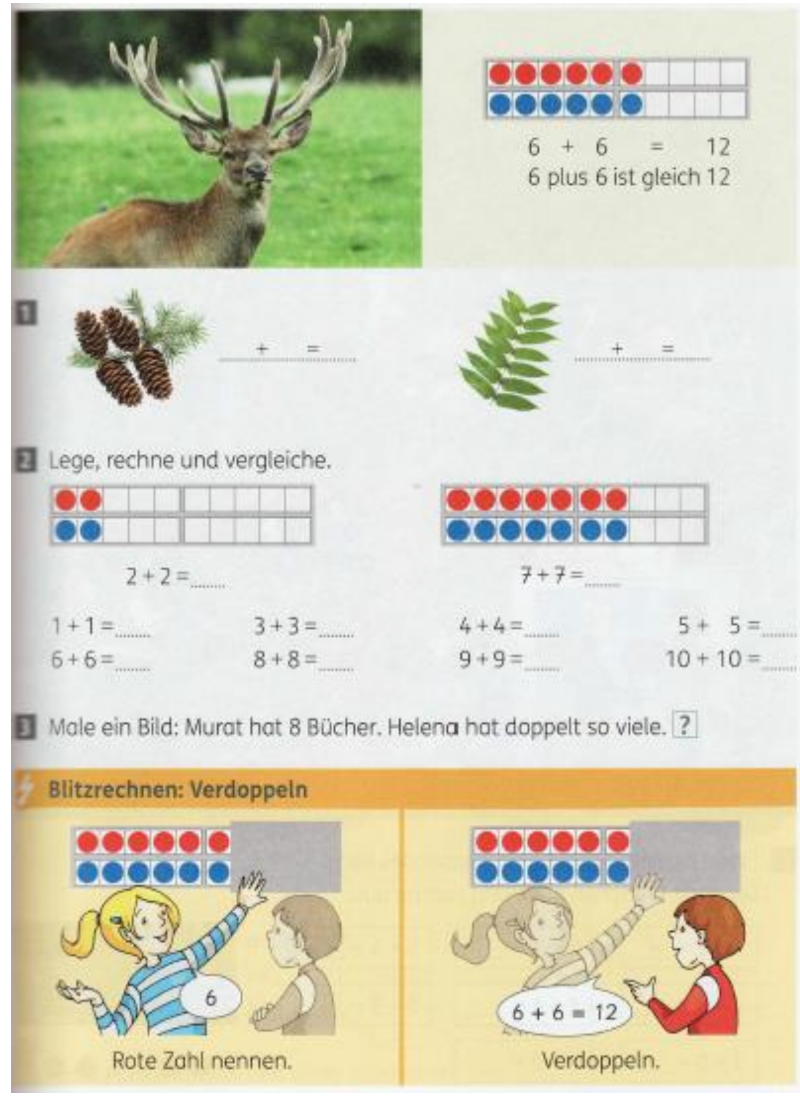
Primo 1, S. 20

Verdopplungsaufgaben

- Erarbeitung am Zwanzigerfeld
- Erweiterung: Analogie
- Auswendiglernen: Stützpunktwissen



Das Zahlenbuch 2, S. 38



Das Zahlenbuch 1, S. 49

Halbieren

1 Halbiert die Zahl 64.

Isa legt die Aufgabe mit Geld.

Sie wechselt:

Sie berechnet die Hälfte:
20 + 10 + 2 = 32

Felix legt die Aufgabe mit Plättchen.

Er teilt gerecht auf: 60 = 30 + 30
4 = 2 + 2
64 = 32 + 32

Wie rechnen die Kinder? Vergleicht mit euren Rechenwegen.

Das Zahlenbuch 2, S. 39

Halbieren

1 Die Hälfte von 4 ist __.
Die Hälfte von 10 ist __.

2 Die Hälfte von __ ist __.
Die Hälfte von __ ist __.
Die Hälfte von __ ist __.

3 6
6 = __ + __

4 2 = __ + __ 8 = __ + __ 6 = __ + __
10 = __ + __ 4 = __ + __ 12 = __ + __

5 7? 5?

6

die Zahl	2		6	8	
die Hälfte der Zahl		2			

Duden 1

Fastverdopplungsaufgaben und Fasthalbierungsaufgaben

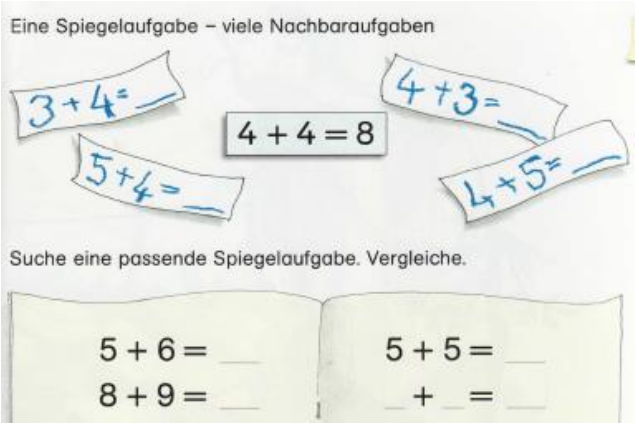
7 + 8

13 – 6

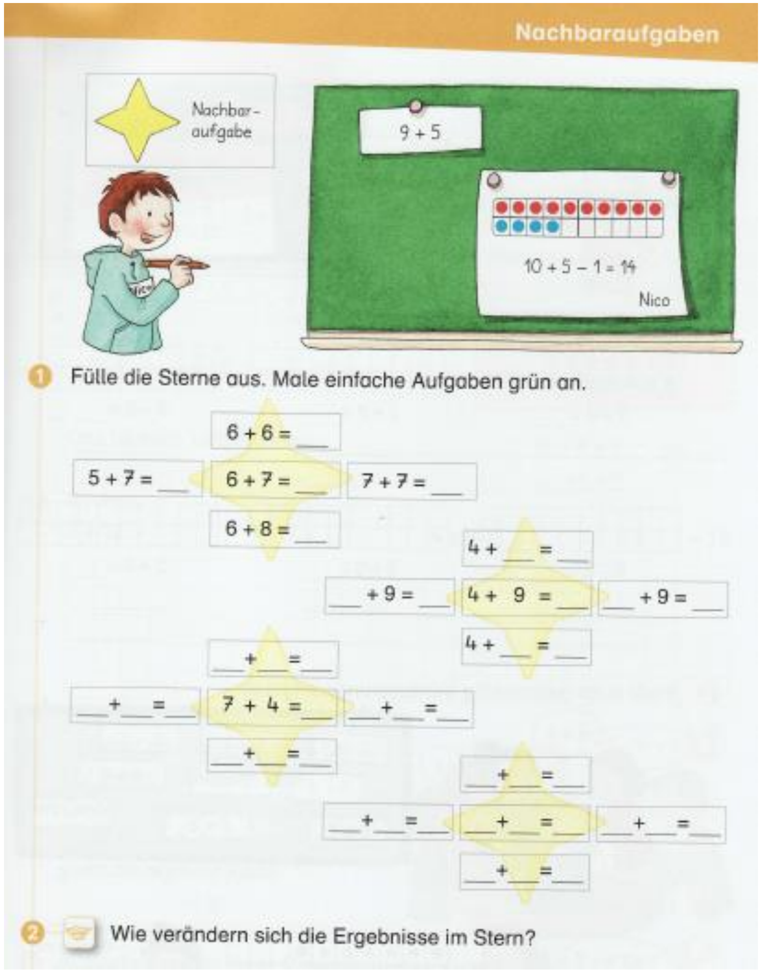
- Erarbeitung z.B. am Zwanzigerfeld
- Grundlage: sicheres Beherrschen der Verdopplungsaufgaben

Nachbaraufgaben

- ***Ein*** Summand verändert sich um 1.
- Fastverdopplungsaufgaben als Nachbaraufgabe zu Verdopplungsaufgaben



Die Matheprofis 1



Spürnasen Mathematik, Themenheft Zahlen und Rechnen 1

8 × 7: Heuristische Strategien

Ordnen Sie die Strategien zu!

10×7=70 ist leicht. Ich muss 2×7 abziehen. Also rechne ich 70-14=56

Ich kenne schon 7×7=49. Das Produkt 8×7 ist um 7 größer, darum 8×7=56.

Ich weiß 2×7=14. Durch Verdoppeln erhalte ich 4×7=28, durch nochmaliges Verdoppeln 8×7=56.

Nachbaraufgabe

Verdopplung/ Halbierung eines Faktors

Zerlegung eines Faktors

8×7: Heuristische Strategien

Jeder Achter am Hunderterfeld setzt sich aus einem Fünfer und einem Dreier zusammen. Darum rechne ich 7×8=7×5+7×3=35×21=56.

Ich kenne die Quadratzahl 8×8=64 auswendig. Ich ziehe 8 ab, also 7×8=56.

Ich kenne die Quadratzahl 7×7=49 auswendig. Ich zähle 7 dazu, also 8×7=56.

Die Achterreihe kann ich schon, also weiß ich: 7×8=56. Darum ist auch 8×7=56.

Tauschaufgabe

Nachbaraufgabe

Zerlegung eines Faktors

48÷8

- Umkehraufgabe

  Ich weiß $6 \times 8 = 48$. Darum ist $48 \div 8 = 6$.

- Aufsagen der Achterreiche

  8, 16, 24, 32, 40, 48. Das sind 6 Schritte, also gilt $48 \div 8 = 6$.

- Wiederholte Subtraktion

  $48 - 8 = 40$, $40 - 8 = 32$, $32 - 8 = 24$, $24 - 8 = 16$, $16 - 8 = 8$, $8 - 8 = 0$.

  Ich kann 8 sechsmal von 48 abziehen, also gilt $48 \div 8 = 6$.

48÷8

- Nachbaraufgabe
  Vergrößerung oder Verkleinerung des Dividenden um den Divisor, hier also 48 plus oder minus 8
  40 ÷ 8 = 5, darum gilt 48 ÷ 8 = 6.

- Verdoppeln/Halbieren

  Durch Verdopplung oder Halbierung des Dividenden bzw. des Divisors wird das Ergebnis gefunden.
  Ich kenne schon 24÷8=3.
  48 ist das Doppelte von 24 und 6 das Doppelte von 3, also: 48:8=6

Heuristische Strategien: Überblick

- Zerlegungsstrategien
  - stellenweises Rechnen
  - schrittweises Rechnen
- Variationsstrategien / Ableiten (operative Zusammenhänge nutzen)
  - Vereinfachen
  - Hilfsaufgaben

Zerlegungsstrategien

Schwerpunkt: Addition und Multiplikation

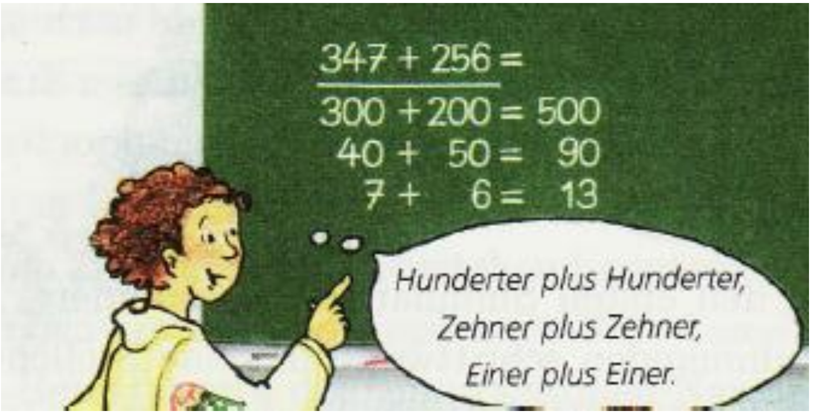
- Stellenweise
  - Orientiert am Dezimalsystem
  - Beide Summanden / Faktoren werden zerlegt

- Schrittweise
  - Ein Summand / Faktor wird zerlegt
  - Orientierung an „Stützpunktzahlen“
  - Nicht unbedingt orientiert am Dezimalsystem

Stellenweise: Addition

- *Beide* Summanden werden jeweils stellenweise zerlegt
- Grundlage: Assoziativ- und Kommutativgesetz
- Enge Verbindung zum schriftlichen Rechnen
- Als Grundlage zum Kopfrechnen eher ungeeignet
- Häufigste Notationsform ist die Gleichungsschreibweise, Rechenstrich ist nicht geeignet.

$$\begin{array}{rcl} \underline{479 + 135} & = & 500 + 100 + 14 = 614 \\ 400 + 100 & & \\ 70 + 30 & & \\ 9 + 5 & & \end{array}$$



Zahlenbuch 3 zitiert in: Padberg, F. & Benz, C., 2011, S. 177

Stellenweise: Multiplikation

Beide Faktoren werden *stellenweise* zerlegt.

27 × 43

$=(20+7) \times (40+3)$

$=20\times40 + 20\times3 + 7\times40 + 7\times3$

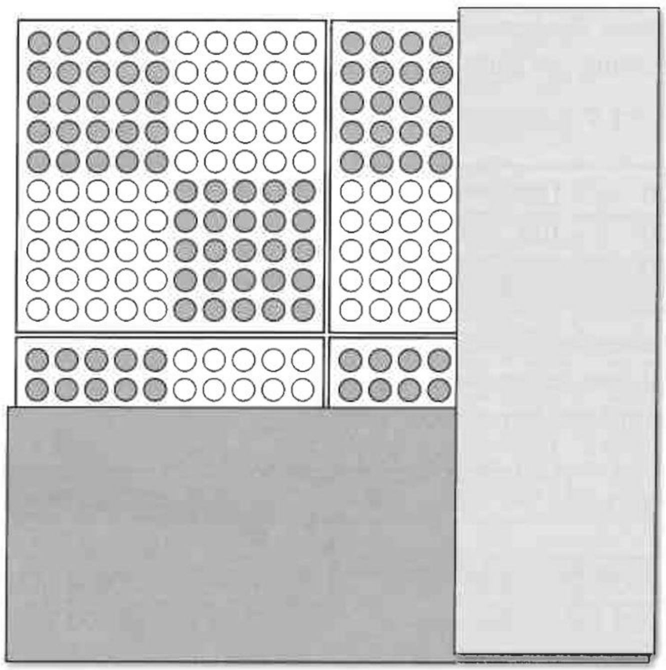
$=800 + 60 + 280 + 21$

$=1161$

Uff!
Ganz schön viel
Distributivgesetz!

Möglichkeit der Veranschaulichung

Ikonische Darstellung am Punktfeld – symbolische Darstellung am



Schipper, W. et al., 2018, S. 70

Malkreuz

·	10	4	
10	100	40	
2	20	8	
			168

$12 \cdot 14 = 168$
$10 \cdot 10 = 100$
$10 \cdot 4 = 40$
$2 \cdot 10 = 20$
$2 \cdot 4 = 8$

·	10	4	14
10	100	40	140
2	20	8	28
12	120	48	168

Stellenweise: Subtraktion

- Minuend *und* Subtrahend werden stellenweise zerlegt und stellenweise subtrahiert
- Potenziell problematisch
  - aber: tiefergehendes Zahl- und Operationsverständnis
- wird in Schulbüchern *nicht* systematisch vorgestellt

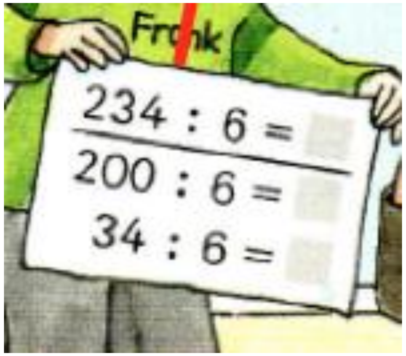
$$\begin{array}{rl} \underline{634 - 378} & = 300 - 40 - 4 = 256 \\ 600 - 300 & \\ 30 - 70 & \\ 4 - 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 613 & - \quad 475 & = & 138 \\ \hline 200 & & & \\ -\,60 & & & \\ -\,2 & & & \end{array}$$

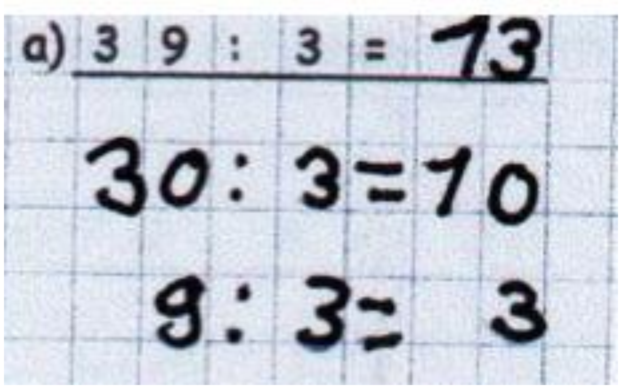
Quelle unbekannt

Stellenweise: Division

Wann kann man stellenweise rechnen?



Quelle unbekannt



Stellenweise rechnen ist *prinzipiell* immer möglich – führt aber in der Regel zum Rechnen mit Brüchen und ist in der GS daher nur bei wenigen Aufgaben sinnvoll.

Schrittweise: Addition

- Nur *ein* Summand wird zerlegt, in der Regel der zweite.
- Unterschiedliche Zerlegungen sind möglich, nicht nur die Zerlegung in die Stellenwerte

$$\underline{479 + 135} = 609 + 5 = 614$$
$$579 + 30 + 5$$

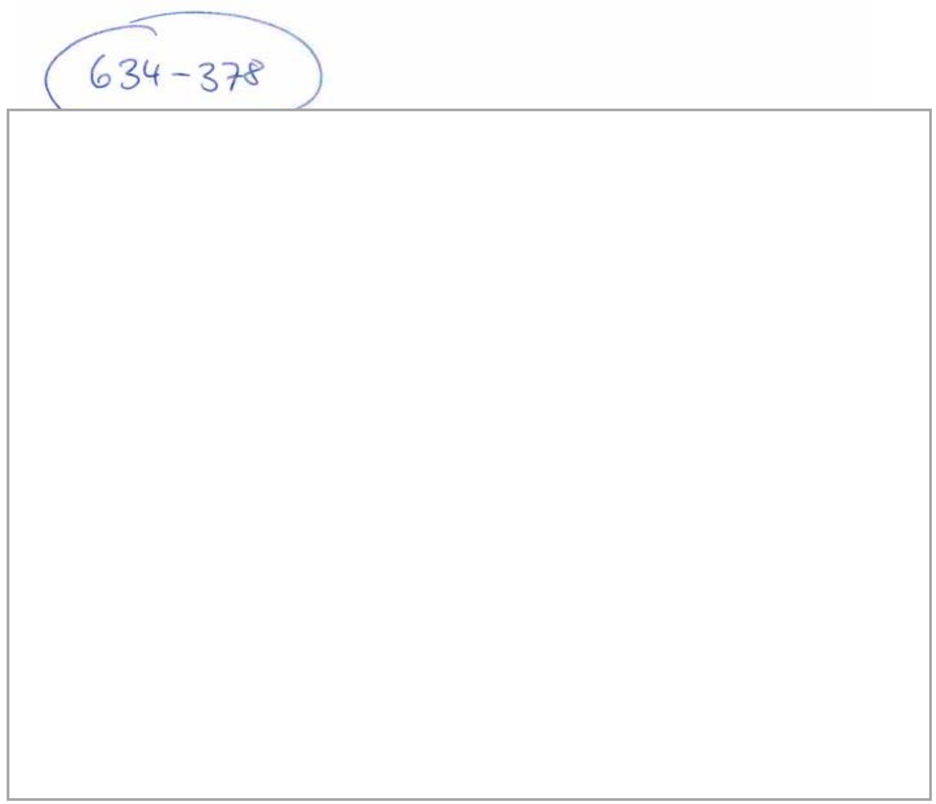
$$\underline{479 + 135} = 500 + 114 = 614$$
$$479 + 21 + 114$$

- Grundlage: Assoziativgesetz
- Als Grundlage zum Kopfrechnen gut geeignet
- Geeignete Notationsformen sind die Gleichungsschreibweise und der Rechenstrich.

Zahlenbuch 3 zitiert in: Padberg, F. & Benz, C., 2011, S. 177

Schrittweise: Subtraktion

- Zerlegung *einer* Zahl schrittweise, meist des Subtrahenden
- verschiedene *Lösungswege* bzw. Zerlegungen möglich
- *Notationsformen*
  Zahlenstrich
  Pfeildarstellung
  Gleichungsschreibweise



Eigene Abbildung

Minuend zerlegen:
271 − 35 = (236 + 35) − 35

Schrittweise: Multiplikation

9 x 33?

Ein Faktor wird additiv oder multiplikativ zerlegt.

9 × 38

$$\begin{array}{rcrcr} 9 & \cdot & 38 & = & 342 \\ \hline 9 & \cdot & 30 & = & 270 \\ 9 & \cdot & 8 & = & 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} 9 & \cdot & 38 & = & 342 \\ \hline 9 & \cdot & 40 & = & 360 \\ 9 & \cdot & 2 & = & 18 \end{array}$$

Padberg, F. & Benz, C., 2011, S. 185

9 × 38

$$\begin{array}{rcrcr} 9 & \cdot & 38 & = & 342 \\ \hline 3 & \cdot & 38 & = & 114 \\ 3 & \cdot & 114 & = & 342 \end{array}$$

Oder als Nachbaraufgabe:

$$\begin{array}{rcrcr} 9 & \cdot & 38 & = & 342 \\ \hline 10 & \cdot & 38 & = & 380 \\ 1 & \cdot & 38 & = & 38 \end{array}$$

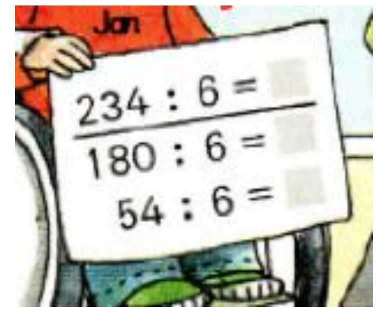
Schrittweise: Division

1. Additive Zerlegung des Dividenden

240 ÷ 6 = 40
4 ÷ 4 = 1

(Nachbaraufgabe)

180 ÷ 6 = 30
54 ÷ 6 = 9
234 ÷ 4 = 39



Quelle unbekannt

2. Multiplikative Zerlegung des Divisors

234 ÷ 6 = 39
234 ÷ 2 = 117
117 ÷ 3 = 39

6 = 2 x 3

836 : 4 = 209
836 : 2 = 418
418 : 2 = 209

Ableiten

operative Beziehungen nutzen

- Vereinfachen: Aufgaben mit gleichem Ergebnis
  - Gegensinniges Verändern: Addition und Multiplikation
  - Gleichsinniges Verändern: Subtraktion und Division
  - Ergänzen (Umkehraufgaben)
- Hilfsaufgaben: Ergebnis verändert sich
  - Analogieaufgaben
  - Nachbaraufgaben und entsprechende Variationen

Ableiten – Vereinfachen

- Gegensinniges Verändern: Addition und Multiplikation
  Konstanzgesetz

$479 + 135 = 614$
$480 + 134$
$500 + 114$

$a + b = (a + c) + (b - c)$
denn: $c + (-c) = 0$

Nullsummen-Spiel

$\underline{24 \times 6} = 144$

$4 \times 36 =$

$2 \times 72 =$

$12 \times 12 =$

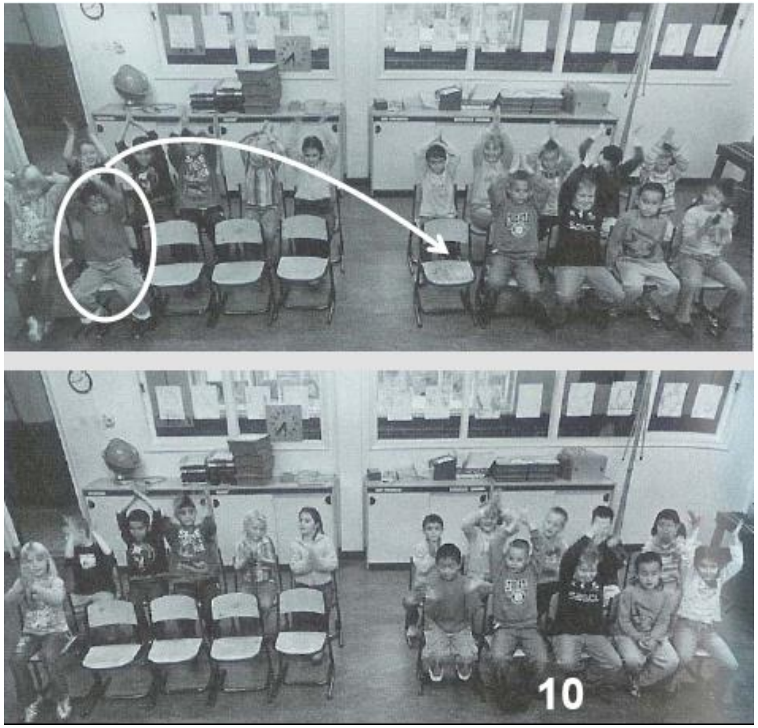
$a \times b = (a \times c) \times \left(b \times \frac{1}{c}\right)$

denn: $c \times \frac{1}{c} = 1$

Gegensinniges Verändern bei der Addition

Sachsituation:

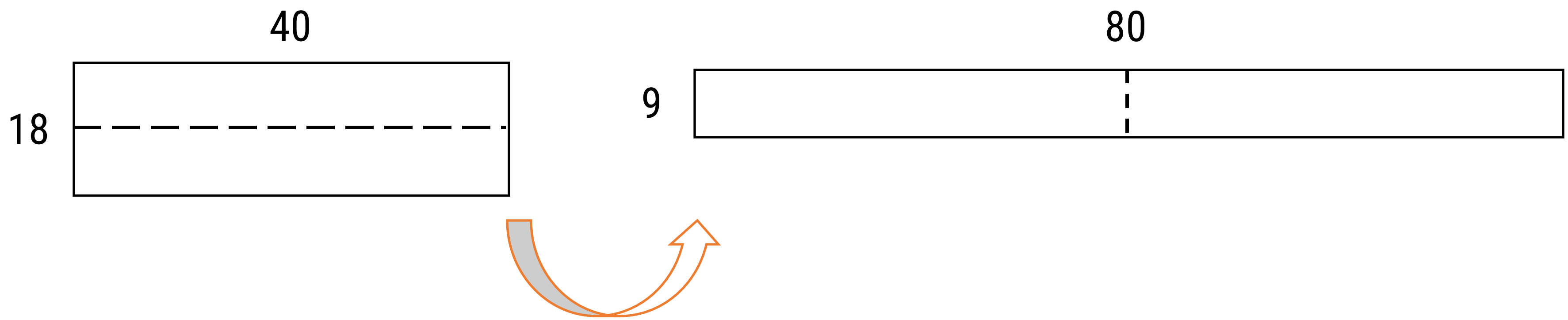
- Wie viele Kinder sitzen in der Klasse?
- Beide Summanden werden verändert.



Quelle unbekannt

Gegensinniges Verändern Multiplikation

Wenn man einen Faktor verdoppelt, verdreifacht …,
muss der andere Faktor halbiert, gedrittelt … werden,
damit das Ergebnis gleich bleibt.



Anwendung Grundschule vor allem: wiederholtes Verdoppeln und Halbieren

Ableiten - Vereinfachen

Gleichsinniges Verändern: Subtraktion und Division

Konstanzgesetz

$$\begin{array}{l} 634 - 378 = 256 \\ \hline 636 - 380 \\ \hline 656 - 400 \end{array}$$

$$a - b = (a + c) - (b + c)$$
$$= (a - b) + (c - c)$$

$\underline{96 : 12} = 8$

$48 : \;\; 6 =$

$24 : \;\; 3 =$

$$a : b = (a \times c) : (b \times c)$$
$$= (a : b) \times (c : c)$$

$$\frac{96}{12} = \frac{48}{6} = \frac{24}{3}$$

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$ gleichwertige Brüche

Ableiten- Vereinfachen

Ergänzen: Umkehroperation nutzen

- wenn Minuend und Subtrahend dicht beieinander liegen *(371 – 368 =)*
- Wenn Subtrahend dicht an nächster vollen 10'Potenz liegt *(463 – 97 =)*

- Ergänzen auf volle Hunderter

$\underline{634 - 378} = 22 + 234 = 256$

400

634

- Stellenweises Ergänzen

$\underline{634 - 378} = 6 + 50 + 200 = 256$

384

434

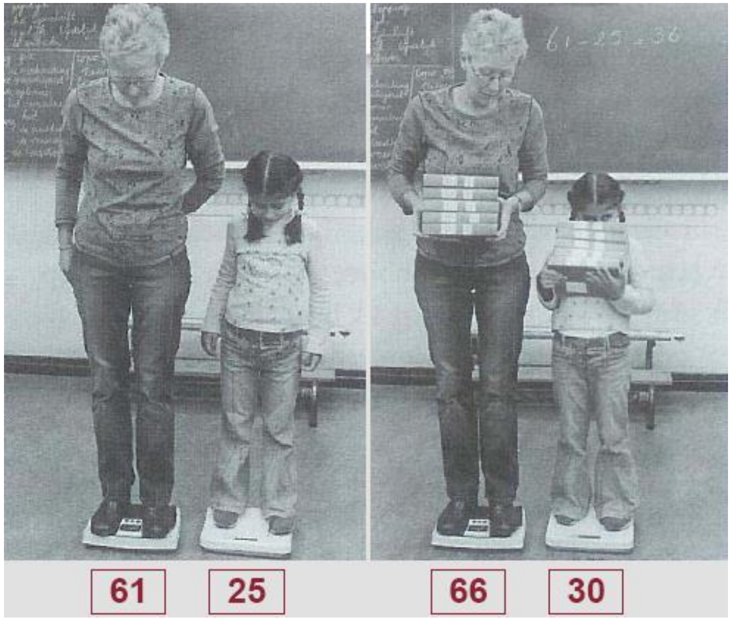
634

Die Matheprofis 3, S. 55

Gleichsinniges Verändern bei der Subtraktion

Sachsituation:

- Wie viele Kilogramm schwerer?
- Minuend und Subtrahend werden verändert.



Quelle unbekannt

Ableiten - Hilfsaufgabe

Analogien nutzen (Schwerpunkt: Dezimalsystem als Grundlage)

Operation	Beispiele
Addition	340 + 60 = 400 34 + 6
Subtraktion	560 – 90 = 470 56 – 9
Multiplikation	300 x 12 = 3600 3 x 12
Division	240 : 6 = 40 24 : 6

Ableiten- Hilfsaufgabe

Nachbaraufgaben und verwandte Variationen

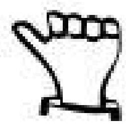
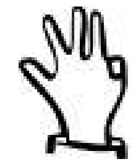
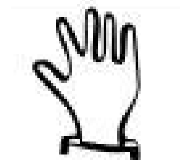
Operation	Beispiele	Veränderung
Addition	295 + 77 = 372 300 + 77 = 377	- 5
Subtraktion	567 – 89 = 478 567 – 90 = 477	+ 1
Multiplikation	24 x 18 = 432 24 x 20 = 480	- 2 x 24
Division	234 : 6 = 39 240 : 6 = 40	- 1

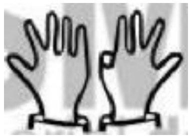
Thekla rechnet 360 : 40 (3. Klasse)

Vereinfachen: Analogie / Gleichsinnig verändern

T: Wie oft passt die 4 in die 36 rein?

Vorstellung: „Messen“

T: 4  8  12  16  20 

24  28  32  **36** 

Lösungsstrategie: vorwärts zählen in Schritten (Zahlenfolge vorwärts)

sinnvolle Alternative: **Nachbaraufgabe** (40÷4)

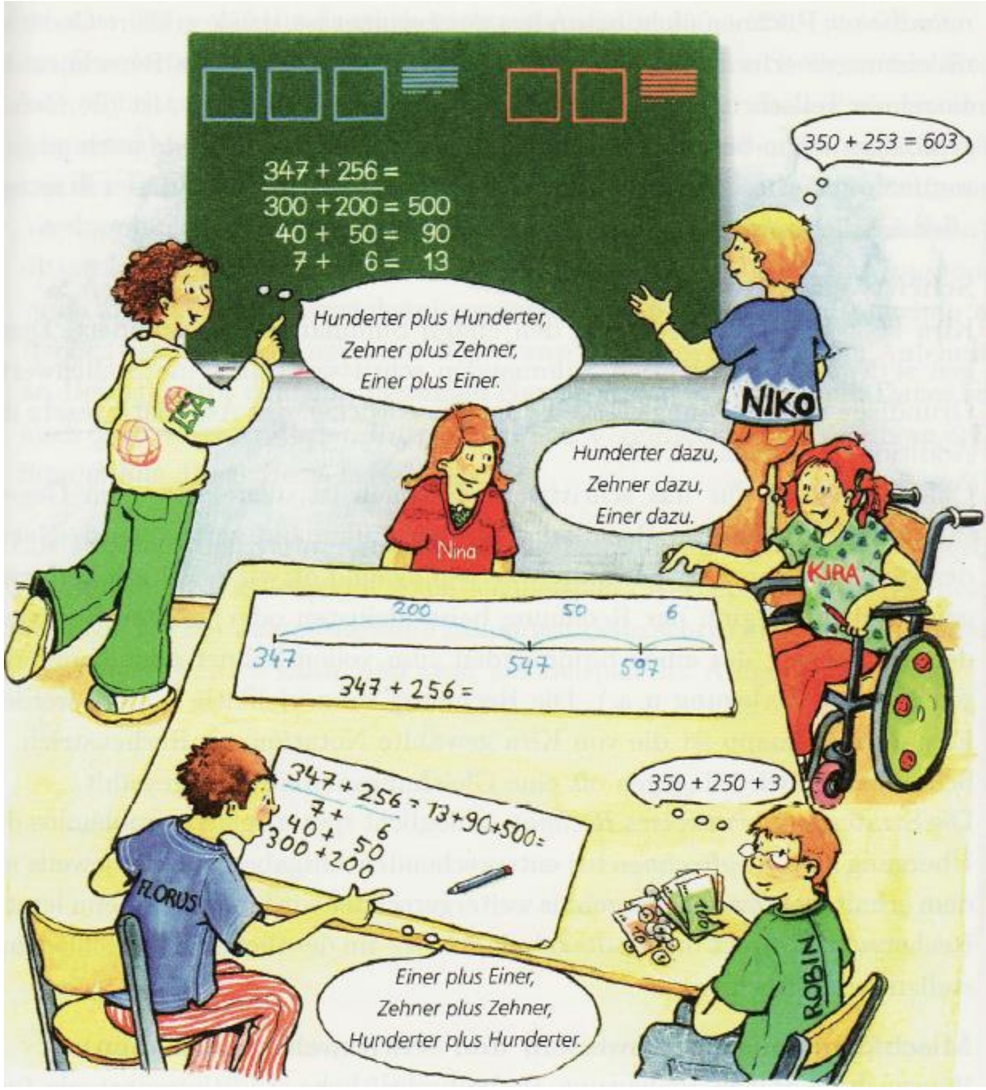
Hände: https://www.grundschulmaterial.de/medien/Mathe/Klasse%201/Material%20f%C3%BCr%20F%C3%B6rderklassen/Anschauungsmaterial%20zum%20ZR%2010/c/3/1856/7563/7619/t/Arbeitsblatt/k/Fingerbilder/p/1/

Und welche Strategien sind das?

Lösungsvielfalt, Kinderlösungen und Fehler!
Als Übungsangebot für die Klausur.

Addition

- Stellenweises Rechnen
- Schrittweises Rechnen
- Ableiten



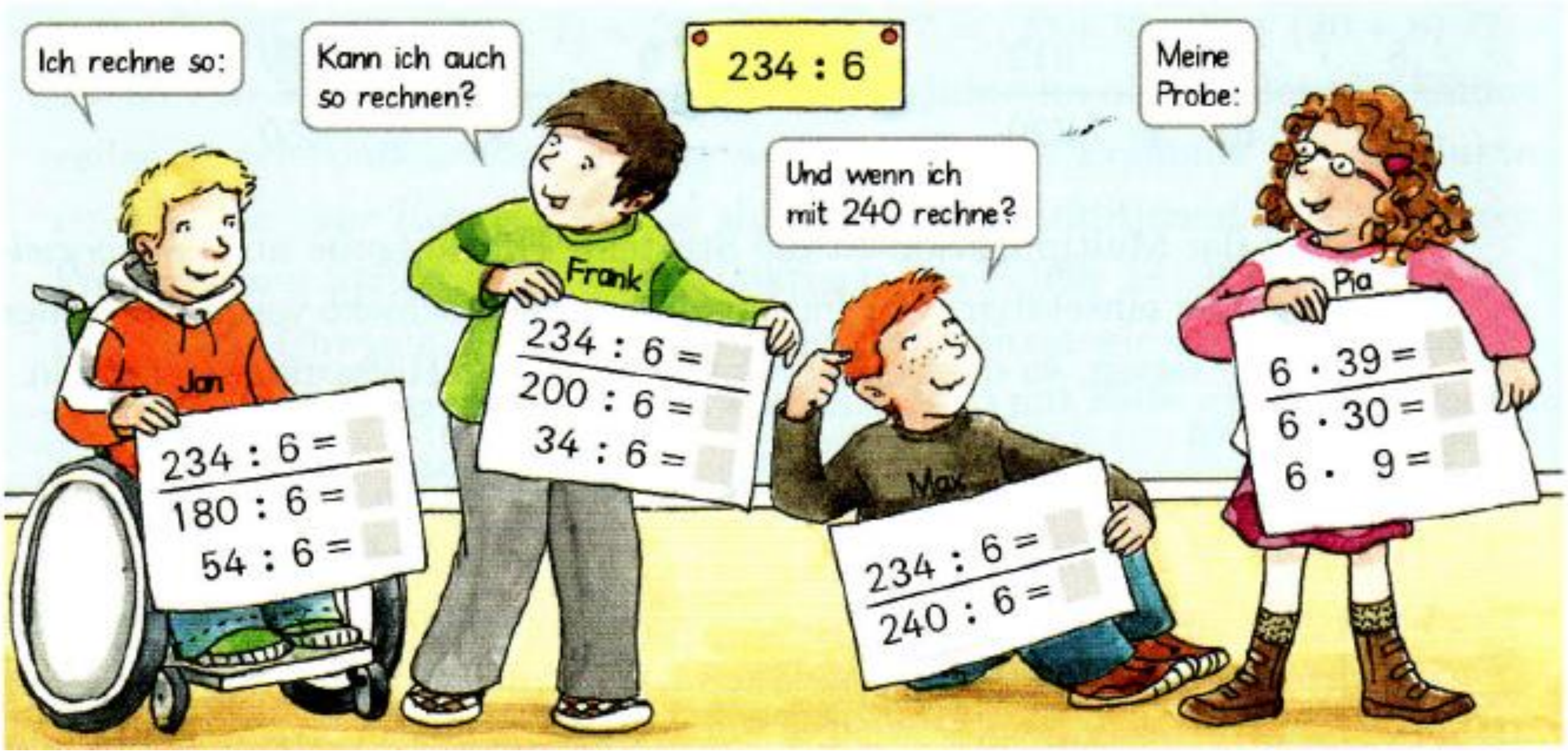
Zahlenbuch 3 zitiert in: Padberg, F. & Benz, C., 2011, S. 177

Multiplikation

- Schrittweise
- Stellenweise
- Ableiten

Duden Mathematik 3, S. 58

Division



Quelle unbekannt

Lösungswege zu 96 – 57

-

$\underline{96-57} = 40-1 = 39$

$90-50$

$6-7$ (Bitte keine P

-

$\underline{96-57} = 46-7 = 39$

$96-50-7$

$\underline{96-57} = 40-1 = 39$

$96-56-1$

-

$\underline{96-57} = 9+30 = 39$

66
96

$\underline{96-57} = 3+36 = 39$

60
96

-

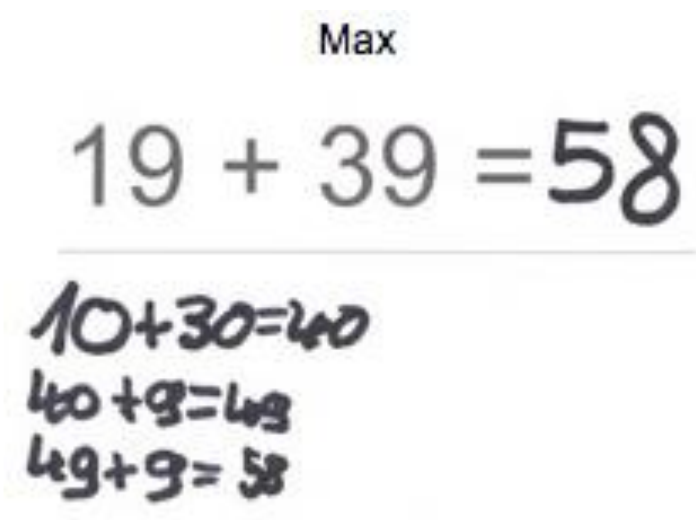
$\underline{96-57} = 89-50 = 39$

$96-7-50$

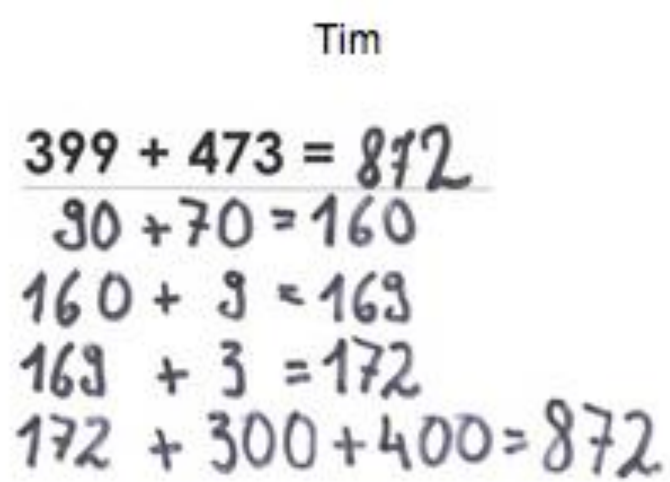
$\underline{96-57} = 39$

$99-60$

Addition: Kinderlösungen



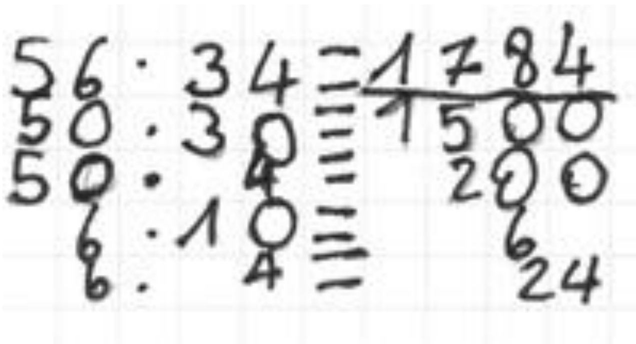
http://kira.dzlm.de/061



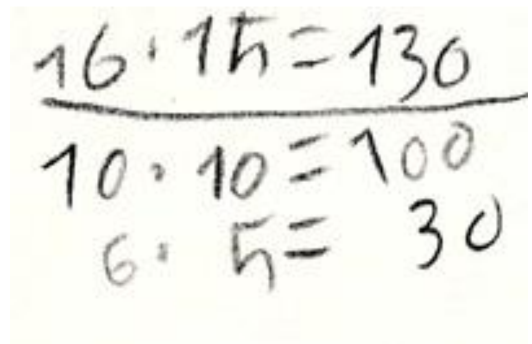
https://kira.dzlm.de/zahlen-und-operationen/halbschriftliches-rechnen/vorgehensweisen-bei-der-halbschriftlichen-addition

Mischform: Zehner extra und schrittweise

Multiplikation



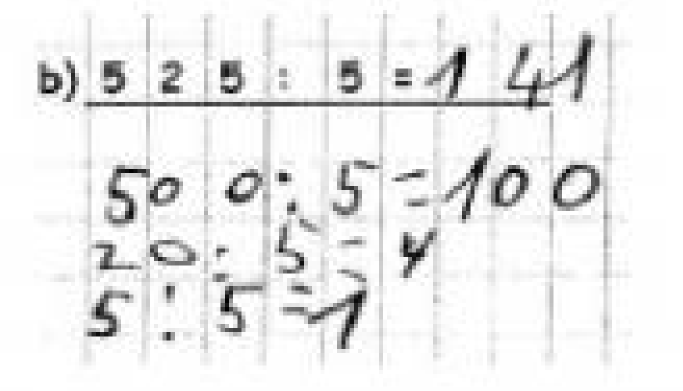
Quellen unbekannt

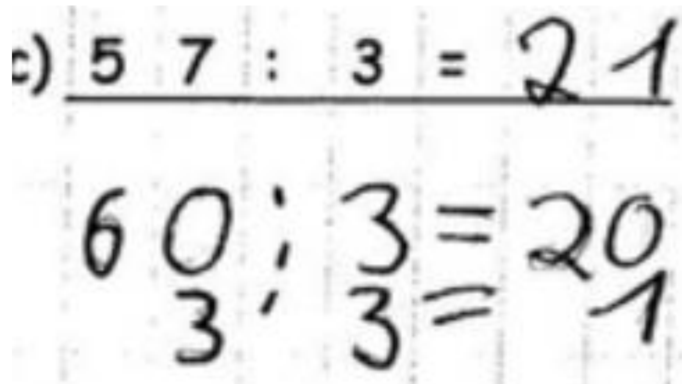


https://kira.dzlm.de/zahlen-und-operationen/halbschriftliches-rechnen/halbschriftliche-multiplikation-strategien-und

- Welcher Fehler ist hier passiert?

Division





Quellen unbekannt

- Wie sind diese Fehler passiert?

Literaturverzeichnis

- Bauer, L. (1998). Schriftliches Rechnen nach Normalverfahren – wertloses Auslaufmodell oder überdauernde Relevanz? *Journal für Mathematik-Didaktik, 19, 179-200*.
- Krauthausen, G. (1993). Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. *Journal für Mathematik-Didaktik, 14, 189-219*.
- Wittmann, E. & Müller, G. (2018). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band II: Halbschriftliches und schriftliches Rechnen.* Seelze: Klett.
- Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Springer.
- Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (2018). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 4. Schuljahr.* Braunschweig: Schroedel.