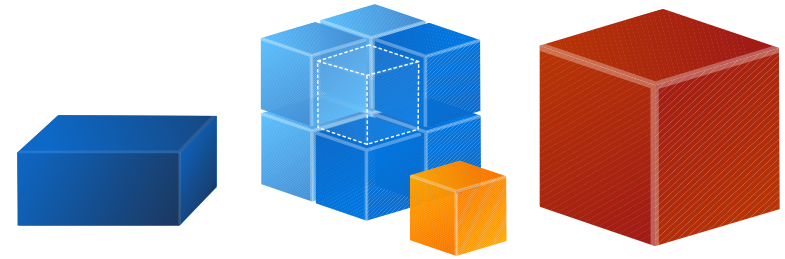


Idee des Messens - Körper und Volumen

Referat 7, Didaktik der Geometrie,
WS 2018/19, Uwe Tuschy

Überblick



Körper und Volumen im Lehrplan der Sek I
Raumgeometrie in den Bildungsstandards

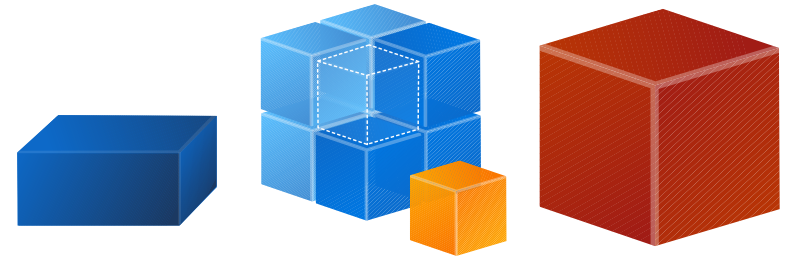
Erlernen von Körpergrundformen

Körpermodelle zum Aufbau der
Raumvorstellung

Berechnung von Körpervolumen in der Sek I

Beispiele für die unterrichtliche Umsetzung

Überblick



Körper und Volumen im Lehrplan der Sek I

Raumgeometrie in den Bildungsstandards

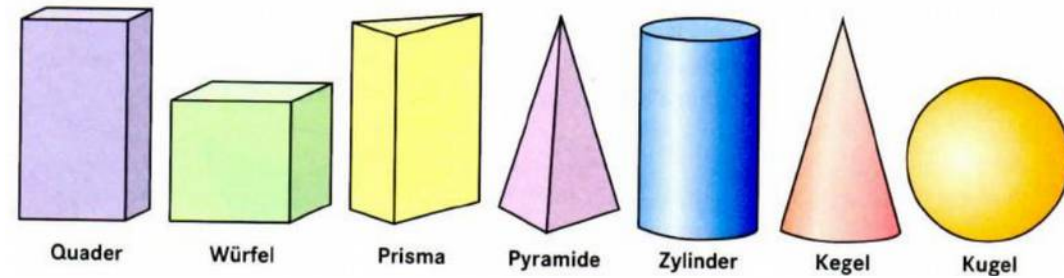
Erlernen von Körpergrundformen

Körpermodelle zum Aufbau der
Raumvorstellung

Berechnung von Körpervolumen in der Sek I

Beispiele für die unterrichtliche Umsetzung

Was? - Lehrplan GS



Was bringen die SuS aus der Grundstufe mit?

- Begriffsbildung und Grundvorstellungen:
Kennen von Kugel, Würfel, Quader, Pyramide, Kegel, Zylinder
- Körper unterscheiden, beschreiben und zueinander in Beziehung setzen
- Übertragen des Wissens über Quader auf das Zeichnen einfacher Körpernetze
- Entwickeln des Vorstellungsvermögens über geometrische Objekte

Was? - Lehrplan MA MS

LP Sekundarstufe

- Größenvorstellungen für Länge, Flächeninhalt, Volumen
- Kennen und Beschreiben der Eigenschaften für Körper mit ebenen (Kl. 5-7) und gekrümmten (Kl. 8-9) Begrenzungsflächen
- Vergleiche mit Bezugsobjekten aus dem Lebensumfeld
- Berechnen von Volumen und Mantel-/Oberflächen, Massebestimmung
- Zeichnen und Skizzieren (Grundriss u.a. Ansichten, Schrägbild, Körpernetze)
- Herstellen von Modellen (Wahlpflicht)

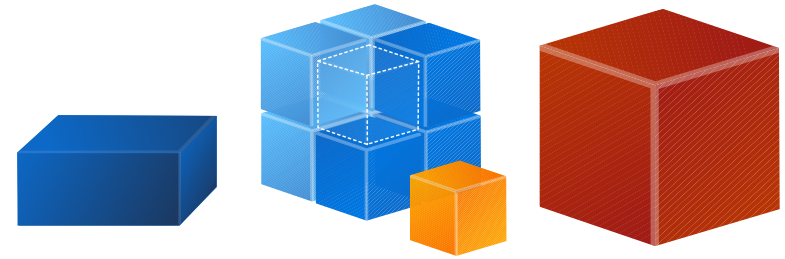
Was? - Körper und Volumen im Lehrplan MS

	5	6	7	8	9	10
Kennen und Beschreiben der Eigenschaften geom. Körper	aus der GS bek. Körper		Übertr. geom. Begr. auf Realobjekte, Prismen			
Einsicht in Symmetrieeigenschaften gewinnen	in der Ebene					
Herstellen von Modellen			bek. Körper, Prismen	WP 3 Modellbau		
Kennen von Verfahren der Darstellung (Grundriss u.a. Ansichten, Schrägbild, Körpernetz)	Quader	gerade Prismen, rech. Pyramiden, zus.ges. Quader	Prismen, zus.ges. Körper RS: techn. Zeichnen	Kreiszylinder, Hohlzyl.	Pyramide, Kreiskegel, tech. Zeichnen RS: Kugel	Pyramiden-/Kegelstumpf
Berechnen von Flächeninhalten	Quader		Quader, Prismen	Kreiszylinder	Pyramide RS: Kugel	Pyramiden-/Kegelstumpf
Berechnen von Volumen (Volumenformeln, Zerlegungsprinzip)	Quader	zus.ges. Körper (Quader)		Kreiszylinder, Hohlzyl.	Kreiskegel, Pyramide RS/HS*: Kugel	Pyramiden-/Kegelstumpf
Berechnungen an zus.gesetzten Körpern		LB4	HS LB1 RS LB4	RS LB2	HS LB 2	
Größenvorstellungen für Länge, Flächeninhalt, Volumen	LB 3					

Was? - Zusammenfassung

- Behandlung der folgenden Körper:
 - Körper mit ebenen Begrenzungsflächen (Würfel, Quader, Prisma, Pyramide und Pyramidenstumpf)
 - Körper mit gekrümmten Begrenzungsflächen (Kreiszyylinder, Kreiskegel und Kegelstumpf, Kugel, Kugelteile)
 - zusammengesetzte Körper
- Anfertigen zeichnerischer Darstellungen, Netze und Abwicklungen
- Berechnen von Flächeninhalten und Volumina

Überblick



Körper und Volumen im Lehrplan der Sek I

Raumgeometrie in den Bildungsstandards

Erlernen von Körpergrundformen

Körpermodelle zum Aufbau der
Raumvorstellung

Berechnung von Körpervolumen in der Sek I

Beispiele für die unterrichtliche Umsetzung

Warum? - Bildungsstandards

L2 Messen - Die SuS ...

- L2.1 nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-, Flächen- und Volumenmessung, [...]
- L2.2 wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus (insbesondere für [...], Volumen und [...]) und wandeln sie ggf. um,
- L2.3 schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über alltagsbezogene Repräsentanten,
- L2.5 ermitteln Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide und Zylinder sowie daraus zusammengesetzten Körpern,
- L2.6 nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor oder entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse so wie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.

Warum? - Bildungsstandards

L3 Raum und Form - Die SuS ...

- L3.1 erkennen und beschreiben geometrische Objekte und Beziehungen in der Umwelt,
- L3.2 operieren gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern,
- L3.4 fertigen Netze, Schrägbilder und Modelle von ausgewählten Körpern an und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen,
- L3.5 klassifizieren Winkel, Dreiecke, Vierecke und Körper,
- L3.6 erkennen und erzeugen Symmetrien

Warum?

Aufgabentypen in den Schulabschlussprüfungen in Klasse 9 (Gaab, 2014):

Die folgende Abbildung 6 zeigt die kumulativen Häufigkeiten für die vier betrachteten Bundesländer.

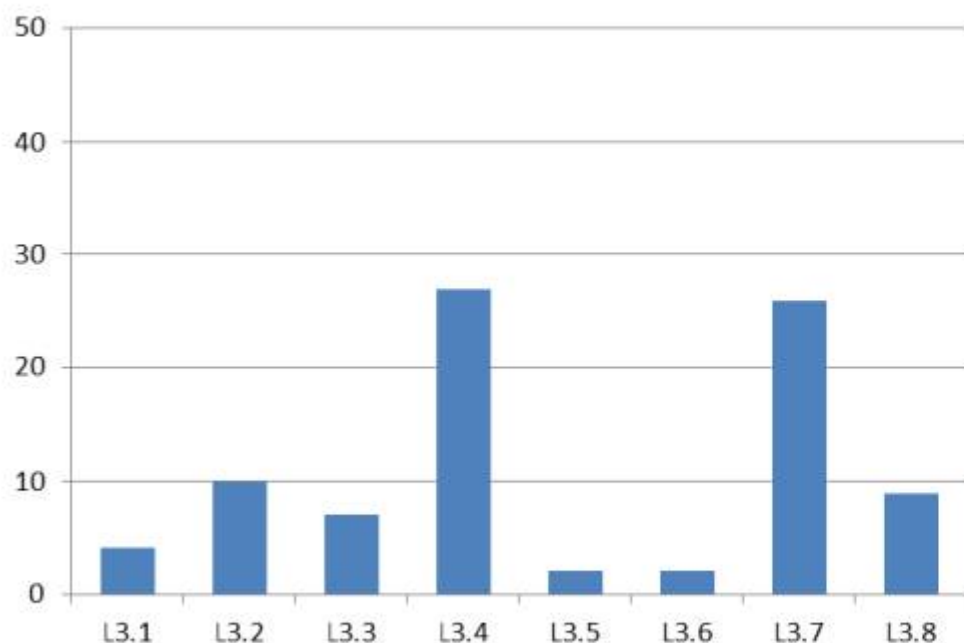


Abb. 6a: Raum und Form

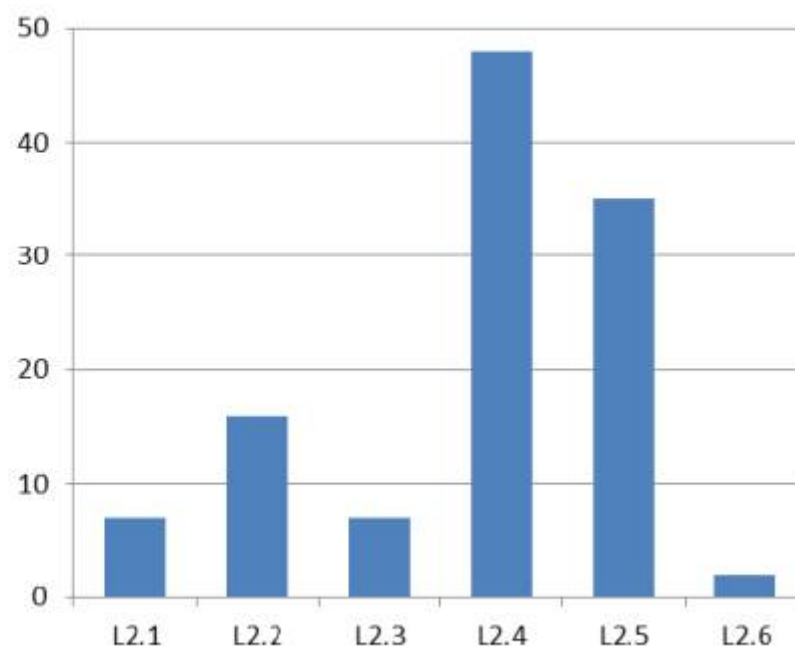
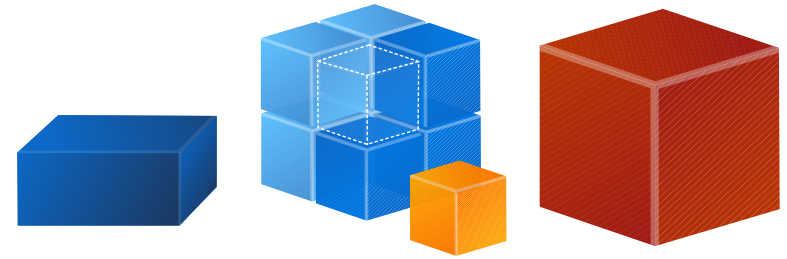


Abb. 6b: Messen

Warum?

- Unsere Welt ist dreidimensional!
- Alltagsbezug: Erkunden und Verstehen von Grundformen in der Umwelt
- Vielfältige Möglichkeiten für Berechnungen im MU – aber: Mathematik ist nicht nur Rechnen!
- Raumvorstellung ein Faktor für das Konstrukt Intelligenz (vgl. Referat 13)

Überblick



Körper und Volumen im Lehrplan der Sek I
Raumgeometrie in den Bildungsstandards

Erlernen von Körpergrundformen

Körpermodelle zum Aufbau der
Raumvorstellung

Berechnung von Körpervolumen in der Sek I
Beispiele für die unterrichtliche Umsetzung

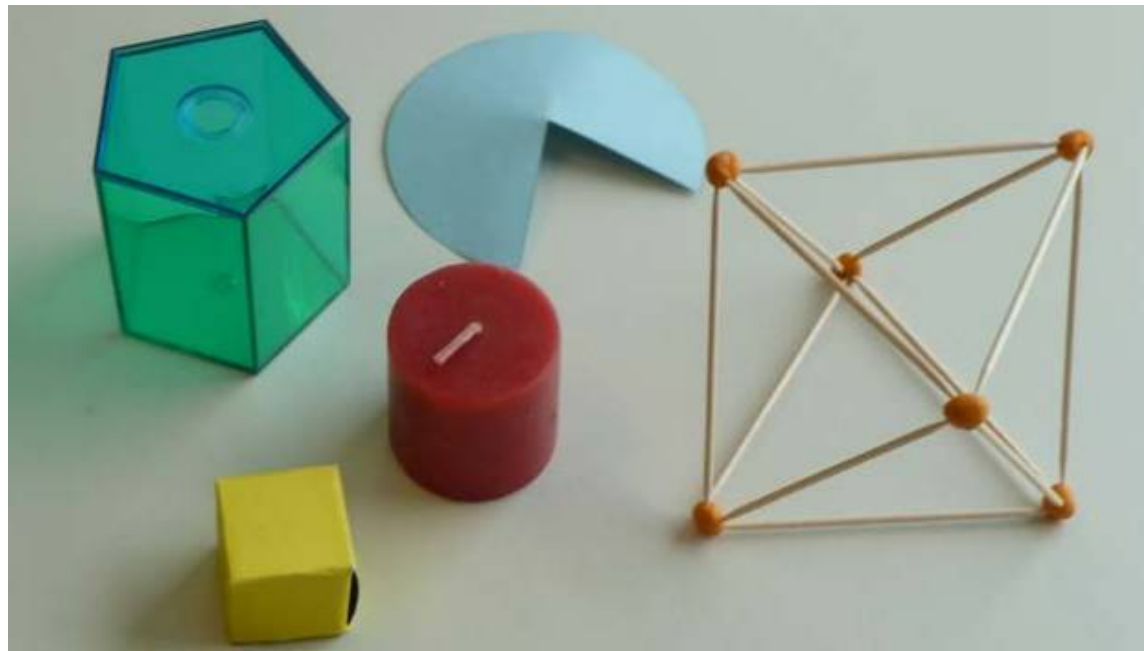
Wie? Erlernen der Körpergrundformen

- die Umwelt mit „geometrischen Augen“ sehen (z.B. in Verpackungen geometrische Körper erkennen)
 - Körpermodelle und -netze operativ erarbeiten
 - operative Begriffsbildung durch Experimente und Realmodelle (Beispiel: Kegel als Rotationskörper)
 - Beschreibung von Körper-eigenschaften und Funktion eines Gegenstandes (Beispiel: Funktion einer Cremedose)
- ganzheitliche Wahrnehmung visueller Merkmale**



Wie? Körpermodelle und ihre didaktische Bedeutung

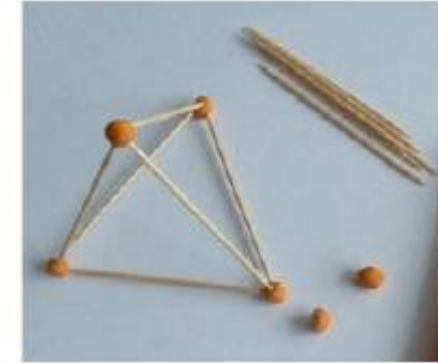
- Kompaktmodelle
- Kantenmodelle
- Flächenmodelle / Vollmodelle



aus: Roth/Weigand (2015) Mathematik im Raum. In: ml 190. 2-8.

Kantenmodelle

Aus Stäben und Knete kannst du Modelle geometrischer Körper bauen.



1. **Wie viele Stäbe benötigst du, um folgende Körper zu bauen:**

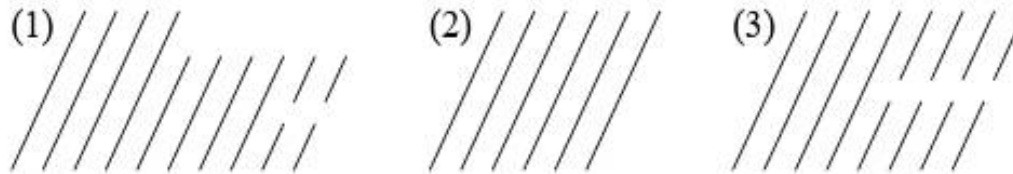
- a) einen Quader, b) ein Dreiecksprisma,
c) eine vierseitige Pyramide

Was kannst du über die Länge der Stäbe aussagen?

2. **Gib für jeden der Körper einen Term an, um die gesamte Kantenlänge zu berechnen.**

3. Die Abbildung zeigt verschiedene Kantensätze.

Welche Körper kannst du jeweils daraus bauen?



4. Du hast n gleich lange Stäbe.

Für welche n kannst du jeweils einen Körper daraus bauen?

Wie heißt dieser Körper? Wann gibt es mehr als eine Möglichkeit?

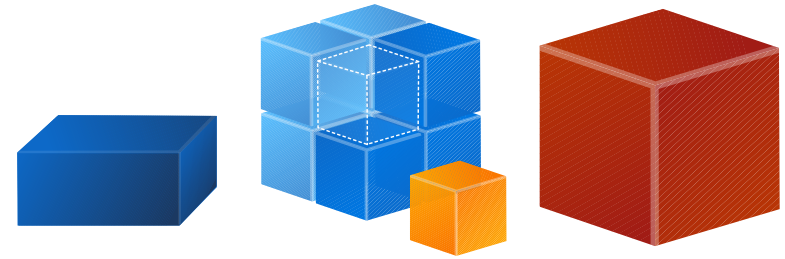
5. Du hast n gleich lange Stäbe und m Stäbe, die ebenfalls gleich lang, jedoch kürzer sind.

In welchen der Fälle kannst du einen Körper daraus bauen? Wie heißt dieser?

Wann gibt es mehr als eine Möglichkeit?

aus: Roth/Weigand (2015) Mathematik im Raum. In: ml 190. 2-8.

Überblick



Körper und Volumen im Lehrplan der Sek I

Raumgeometrie in den Bildungsstandards

Erlernen von Körpergrundformen

Körpermodelle zum Aufbau der
Raumvorstellung

Berechnung von Körpervolumen in der Sek I

Beispiele für die unterrichtliche Umsetzung

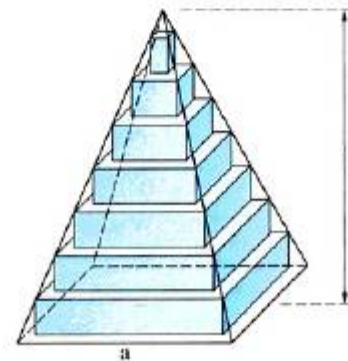
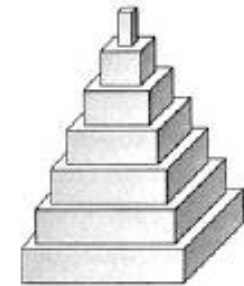
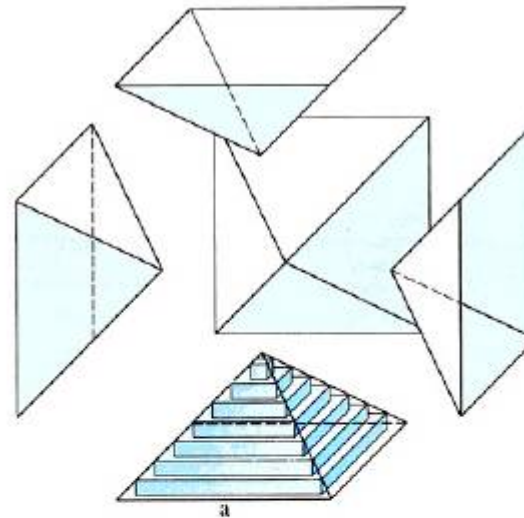
Wie? - Standardrepräsentanten für Volumeneinheiten

- sollten während der Behandlung der Volumeneinheiten im Klassenzimmer möglichst sicht- und greifbar sein (Poster, Realobjekte)

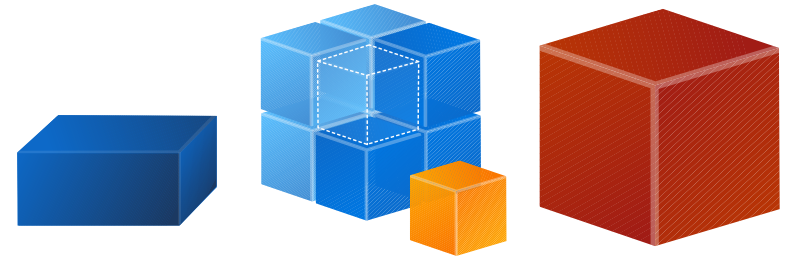
100 m ³	10 m ³	1 m ³	100 dm ³	10 dm ³	1 dm ³ = 1 l	100 cm ³	10 cm ³	1 cm ³ = 1 ml
				Wasser-eimer; Gießkanne		Zehntel- oder Achtel- glas		Finger- kuppe; Steckwürfel

Wie? - Volumenmessung und -berechnung

- Prinzip des Zerlegens und des Neu-Zusammensetzens (z.B. bei Prismen)
- Näherungsüberlegungen zu Rauminhalten von Kegel, Pyramide Halbkugel (z.B. Scheibchenmethode)
- Analogien herstellen zwischen Flächeninhalts- und Volumenformeln, um Formeln bewusster und sinnhafter zu verstehen (z.B. $A(\text{Dreieck})$ und $V(\text{Pyramide})$)



Überblick



Körper und Volumen im Lehrplan der Sek I
Raumgeometrie in den Bildungsstandards

Erlernen von Körpergrundformen

Körpermodelle zum Aufbau der
Raumvorstellung

Berechnung von Körpervolumen in der Sek I

Beispiele für die unterrichtliche Umsetzung

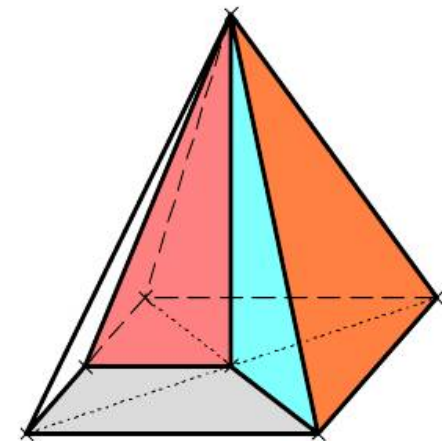
Wie? - Beispiele

Behandlung der Spitzkörper (Pyramide)

„Auch bei der Behandlung der Spitzkörper sollte man der Grundkonzeption

Bauen - Beschreiben - Zeichnen - Berechnen folgen.“
(Krauter 2008, 73)

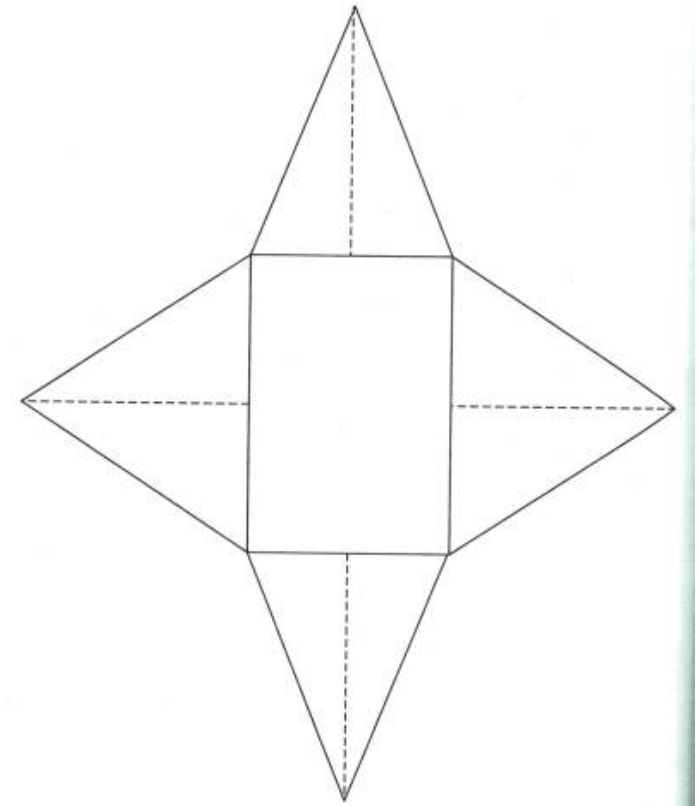
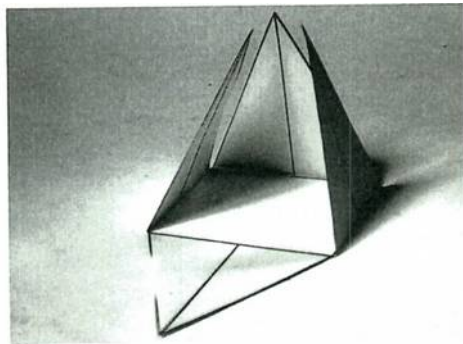
Aufgabe: Ein Zeltdach hat die Form einer senkrechten Pyramide mit folgenden Abmessungen: $h = 8\text{ m}$, $G = a \times b = 8\text{ m} \times 12\text{ m}$. Gesucht ist ein Modell des Daches im Maßstab 1 : 200 (0,5 cm entsprechen 1 m).



Wie? - Beispiele

Behandlung der Spitzkörper (Pyramide, Kegel)

Aufgabe: Ein Zeltdach hat die Form einer senkrechten Pyramide mit folgenden Abmessungen: $h = 8\text{ m}$, $G = a \times b = 8\text{ m} \times 12\text{ m}$. Gesucht ist ein Modell des Daches im Maßstab $1 : 200$ (0,5 cm entsprechen 1 m).



Wie? - Beispiele

Volumenbestimmung der Pyramide

- durch reale Handlungen
(Eintauchversuche, Umfüllen, Ausschneiden eines Vollmodells aus einem Quader)
- Kantenmodell, Zerlegung eines höhengleichen Quaders/Würfels in Pyramiden

Wie? - Beispiele

- **Aufgabe (Klasse 5)**

- baue mit Strohhalmen ein Kantenmodell eines Würfels /
- einer Pyramide ($h=a$),

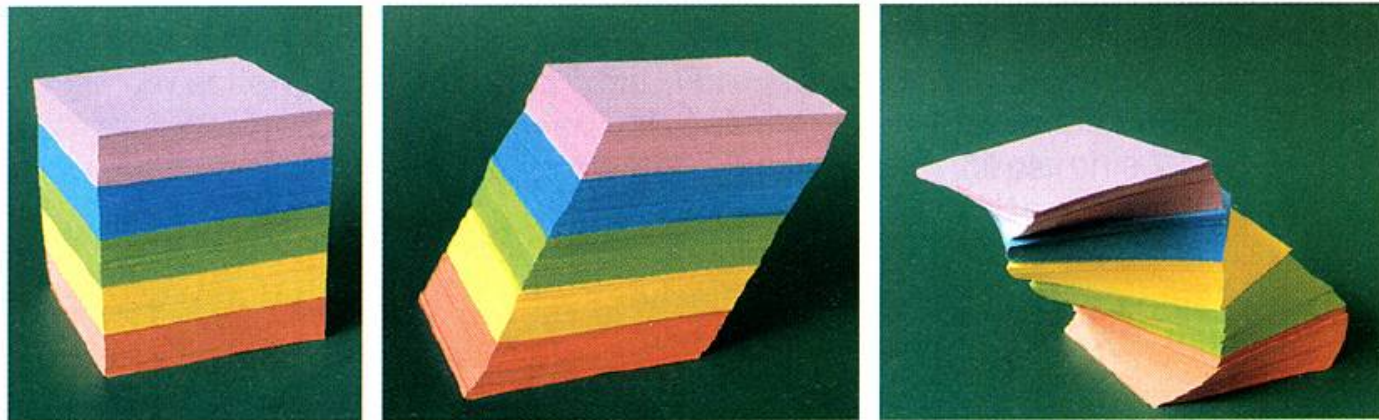
*Wie lang werden
Seitenhöhe und
Seitenkanten?*

- **Aufgabe (Klasse 9)**

- überlege, wie sich drei volumengleiche Pyramiden zu einem Würfel ergänzen lassen
- baue mit Strohhalmen eine dieser Pyramiden in dein Würfelmodell ein

„Kurz gesagt: Wer z. B. die Pyramide in der Schule behandelt und nicht jeden Schüler zumindest ein reales Modell bauen lässt, hat seinen Beruf als Mathematiklehrer verfehlt! Mathematik ist mehr als Rechnen!“ (Krauter 2008, 68)

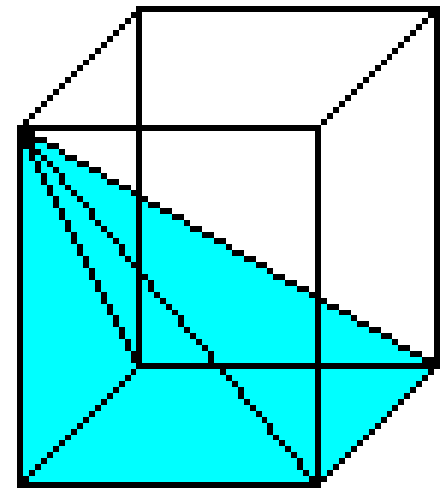
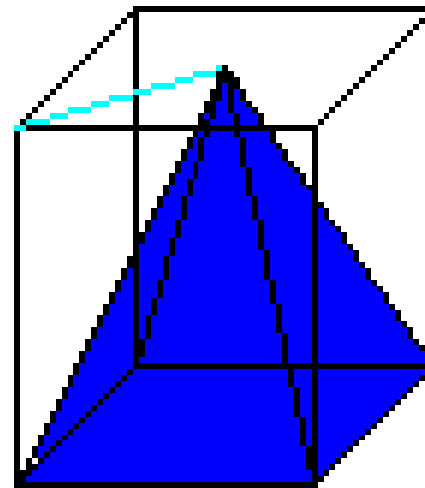
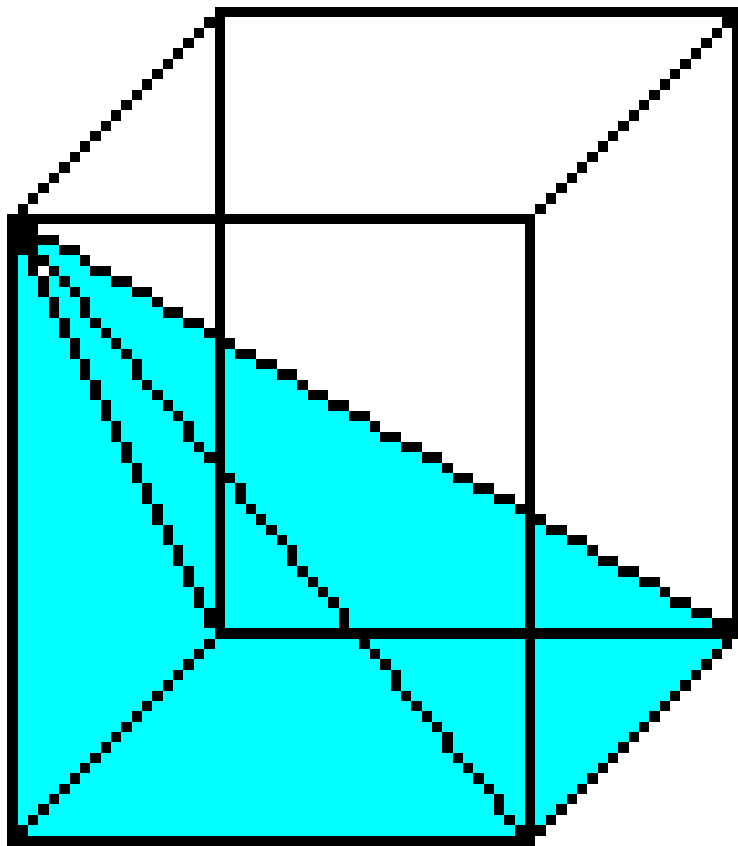
Wie? - Prinzip von Cavalieri^a (1635)



- „Zwei Körper mit durchweg (flächen-)inhaltsgleichen Querschnitten in gleichen Höhen haben gleiches Volumen“
- für SuS als „Plausibilitätsbetrachtung“ (kein Beweis) bei der Erarbeitung der Volumenformeln von z.B. schiefem Prisma oder Pyramide

^aFRANCESCO BONAVENTURA CAVALIERI, 1598-1647

Wie? - Beispiele



Literatur

- Filler, A. (2014) Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung Didaktik der Elementargeometrie. Online verfügbar.
- Gaab, K. (2014). Raumgeometrie in der Sekundarstufe I – Basics? Eine aktuelle Aufgabenschau. In: Filler, A. & Lambert, A. (Hgg.) Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen: Raumgeometrie. AK Geometrie 2014.
- Kramer, M. (2017). Mathematik als Abenteuer. Band I: Geometrie und Rechnen mit Größen. Seelze: Klett.
- Krauter, S. (2008). Beiträge zur Methodik und Didaktik des Geometrieunterrichts in der Sekundarstufe 1 (OPAL). Online verfügbar [...]
- Ludwig, M. (2012). Propädeutische Geometrie in Klasse 5 und 6 (Ebene Geometrie und Raumgeometrie). Vorlesungsskript online verfügbar.
- Weigand, H.G. (2009). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum.
- Lehrplan Mitteschule Sachsen (2004) überarbeitet 2009.
- Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss vom 4.12. 2003