

DISKRETE MATHEMATIK
MITSCHRIFTEN DER VORLESUNG VON

Prof. Dr. Ingo Schiermeyer
Institut für Diskrete Mathematik und Algebra
TU Bergakademie Freiberg
geschrieben von Sascha Matthes

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	3
1.1. Repetitionen	10
1.2. Partitionen	12
1.3. Äquivalenzrelationen	13
1.4. Zusammenfassung	14
2. Erzeugende Funktionen für kombinatorische Probleme	15
2.1. Die Fibonacci-Zahlen	16
2.2. Partitionszahlen	23
2.3. Die Catalanschen Zahlen	26
3. Ramsey-Theorie	30
3.1. Das Dirichletsche Taubenschlagprinzip	30
3.2. Der Satz von Ramsey	31
3.3. Berechnung von Ramsey-Zahlen	35
3.4. Der Satz von van der Waerden	37
A. Lösungen zu Differenzgleichungen zweiter Ordnung	40
B. Einschub zur Graphentheorie	43

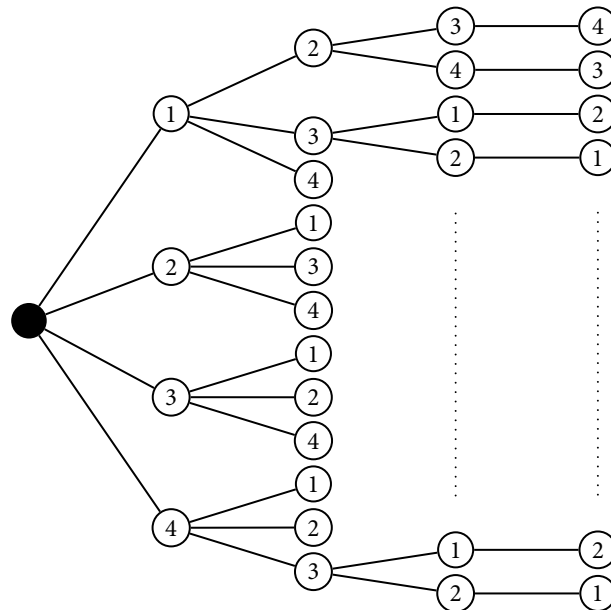
1. Einführung

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit Anordnungen endlicher Mengen und dem Abzählen der verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten unter geeigneten Bedingungen. Dabei kann es sich etwa um die Anordnung von Zahlen in einem n -Tupel handeln, die Sitzordnung von Personen in einem Raum, die Anordnung von Figuren auf einem Spielfeld, von Buchstaben in einem Wort, von Wörtern in einem Lexikon, von Gewinnmöglichkeiten in einem Gewinnspiel, etc. Viele Fragestellungen kommen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung (und der Unterhaltungsmathematik). Weiter bestehen enge Beziehungen zur Graphentheorie und zur Zahlentheorie. Während die Methoden anfangs den speziellen Aufgaben angepasst waren, versucht man heute die Probleme auf bestimmte Grundmuster zurückzuführen und allgemeine Lösungsmethoden zu entwickeln.

Beispiele spezieller Probleme:

B1 Anordnung ohne Wiederholung von 4 Ziffern zu einer Zahl.

Gesucht sind alle bijektiven Abbildungen einer Menge mit 4 Elementen, z.B. $\{1, 2, 3, 4\}$ auf sich, sogenannte Permutationen. Die Anzahl der Anordnungen beträgt 24.



Das Baumdiagramm zeigt die Besetzungsmöglichkeiten für die einzelnen Stellen der vierstelligen Zahl.

1. Einführung

B2 Zusammenstellung von Buchstaben zu einem Wort.

Wie im Beispiel **B1** spielt die Stellung des Buchstabens im Wort eine Rolle, doch können Buchstaben mehrfach auftreten. Für jede Stelle gibt es unabhängig von der Besetzung der anderen Stellen so viele Möglichkeiten, wie Buchstaben zur Verfügung stehen. Bei 26 Buchstaben sind daher z.B. $26^5 = 11881376$ Wörter mit fünf Buchstaben möglich, sogenannte Variationen mit Wiederholung, die natürlich nicht alle eine Bedeutung haben und auch nicht alle vernünftig ausgesprochen werden.

aa	ba	ca	da
ab	bb	cb	db
ac	bc	cc	dc
ad	bd	cd	dd

Die Tabelle zeigt alle möglichen Wörter der Länge 2 mit dem Alphabet $\{a, b, c, d\}$. Es ergeben sich 16 Möglichkeiten.

B3 Partitionen

Viele Würfel-, Geldwechsel- und sogenannte n -Frakturprobleme führen auf die Aufgabe, eine Zahl n als Summe von Summanden aus einer bestimmten Teilmenge von \mathbb{N} zu schreiben, wobei etwa die Anzahl dieser Zerlegungen (Partitionen) zu ermitteln ist.

Soll zum Beispiel beim Würfeln mit 3 Würfeln die Augensumme $n = 14$ betragen, so müssen die Summanden aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ stammen und man erhält gewisse Partitionen.

Beschränkt man die Anzahl der Partitionen nicht auf 3, so gibt es bereits 90 Partitionen der Zahl 14. Die Anzahl steigt auf 135, wenn man beliebige Summanden aus den natürlichen Zahlen ohne 0 zulässt. Berücksichtigt man zusätzlich die Reihenfolge der Summanden, so wächst die Anzahl schließlich auf $2^{13} = 8192$ an.

B4 Beispiel aus der Ramsey-Theorie

Sechs Personen treffen aufeinander, von denen je zwei entweder befreundet oder verfeindet sind. Dann gibt es (stets!) eine Gruppe von dreien, die jeweils miteinander befreundet oder verfeindet sind.

Modell: Ein Graph mit $n = 6$ Knoten (für die Personen) und roten bzw. blauen Kanten (für Freunde bzw Feinde).

Betrachten eine Person, die stets mit drei (oder mehr) der restlichen fünf Personen entweder befreundet oder verfeindet ist.

Der wesentliche Punkt besteht also in der Formalisierung der speziellen Aufgabe zu einem kombinatorischen Problem für eine endliche Menge M :

1. Bestimmung von $|M|$ (Angabe einer „Formel“)

1. Einführung

2. Erzeugung von M , falls $|M|$ bekannt ist.

WUNSCHTRAUM

Eine allgemeine konstruktive Theorie:

Input: Beschreibung von M

Output: Antwort auf 1. oder 2.

Beispiele kombinatorischer Probleme:

(1) $M := \{x \mid x \text{ ist Permutation von } \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

$$|M| = 6! = 720.$$

(2) $M := \{x \mid x \text{ ist Würfelreihe der Länge } 5\}$

$$|M| = 6^5 = 7776 \quad \text{„Variationen“}$$

(3) $M := \{x \mid x \text{ ist Auswahl von } 3 \text{ Werktagen}\}$

$$|M| = \binom{6}{3} = 20 \quad \text{„Kombinationen“}$$

(4) $M := \{x \mid x \text{ ist Äquivalenzrelation über } \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ mit genau } 3 \text{ Klassen}\}$

$$|M| = 90$$

(5) $M := \{x \mid x \text{ ist Darstellung von } 6 \text{ als Summe von } 3 \text{ (positiven) Summanden ohne Unterscheidung der Reihenfolge}\}$

$$|M| = 3$$

Nützlich zur Berechnung von Anzahlen ist der folgende

Satz 1.1 (Basissatz)

Seien N , M und N_1, \dots, N_k endliche Mengen.

a) M ist bijektiv auf N abbildbar $\Leftrightarrow |M| = |N|$ (Bijektion oder isomorphe Abbildung)

b) $M \cap N = \emptyset \Rightarrow |M \cup N| = |M| + |N|$ (Summenregel)

c) $M \subseteq N \Leftrightarrow |N \setminus M| = |N| - |M|$ (Differenzenregel)

d) $|M \times N| = |N| \cdot |M|$ (Produktregel)

1. Einführung

e) Ist $M = N_1 \cup \dots \cup N_k$ und gilt $|N_i| = n > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$, so folgt

$$k = \frac{|M|}{n} \text{ bzw. } |M| = n \cdot k. \quad (\text{Quotientenregel})$$

Zur Vorbereitung interpretieren wir die Objekte der Beispiele (1)-(5) als Abbildungen (φ) von D nach R für geeignete Mengen D (domain) und R (range). Die Menge aller Abbildungen von D nach R bezeichnen wir mit R^D . Wir wollen also für die Elemente x der Beispielmengen zeigen:

$$x \in R^D \text{ für geeignetes } D \text{ und } R.$$

Zu Beispiel (2): (* Würfelolgen der Länge 5*)

Wir setzen $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (Würfel) und $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Augenzahl).

Dann kann jede Würfelfolge als Abbildung von D nach R aufgefasst werden, z.B. entspricht die Würfelfolge $(1, 4, 4, 6, 2)$ dann der Abbildung $\varphi \in R^D$ mit $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 4, \varphi(3) = 4, \varphi(4) = 6, \varphi(5) = 2$ und umgekehrt kann jede Abbildung $\varphi \in R^D$ als Würfelfolge $(\varphi(1), \dots, \varphi(5))$ geschrieben werden, also ist $M = R^D$.

Zu Beispiel (1): (*Permutationen der Zahlen 1-6*)

Wir setzen $D = R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hier ist M die Menge aller bijektiven Abbildungen $\varphi \in R^D$.

Zu Beispiel (3): (*Kombinationen*)

Wir stellen uns vor, dass eine Fahrkarte mit drei Kontrollabschnitten ausgegeben wird, wobei jeder Abschnitt für den darauf bezeichneten Werktag gültig ist.

$D = \{1, 2, 3\} \hat{=} \text{Menge der Kontrollabschnitte}$

$R = \{\text{Mo, Di, Mi, Do, Fr, Sa}\} \hat{=} \text{Menge der Werkstage.}$

Wir wollen jedoch nicht die Billets (Di, Do, Fr) und (Do, Di, Fr) unterscheiden, da sie zu den selben Fahrten berechtigen. M ist daher die Menge aller injektiven Abbildungen $\varphi \in R^D$, wobei D permutiert werden darf.

Zu Beispiel (4): (*Äquivalenzrelationen*)

Zerlege die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in 3 Äquivalenzklassen: $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, R = \{1, 2, 3\}$

Jedem Element wird die Nummer seiner Äquivalenzklasse zugeordnet. Da Äquivalenzklassen nicht leer sind, ist dies eine surjektive Abbildung. Die Zerlegung $\underbrace{\{1, 4\}}_{(1)}, \underbrace{\{2, 3\}}_{(2)}, \underbrace{\{5, 6\}}_{(3)}$

entspricht z.B. der Abbildung

$$\varphi(1) = \varphi(4) = 1, \varphi(2) = \varphi(3) = 2, \varphi(5) = \varphi(6) = 3.$$

Allerdings ist es eine willkürliche Festlegung, welches die erste, zweite, ... Äquivalenzklasse ist. Daher ist M die Menge aller surjektiven Abbildungen $\varphi \in R^D$, wobei R permutiert werden darf.

1. Einführung

Zu Beispiel (5): (*Partitionen*)

Wir setzen $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R = \{1, 2, 3\}$ und können an Beispiel (4) anknüpfen, denn jeder Äquivalenzrelation, die D in 3 Klassen zerlegt, können wir eine Partition mit 3 Summanden zuordnen. Die Zerlegung $\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}$ führt zur Partition $2+2+2 = 6$. Umgekehrt gibt es zu jeder Partition mindestens eine Äquivalenzrelation, die sie erzeugt. Bei dieser Konstruktion fallen im Allgemeinen viele Äquivalenzrelationen auf die selbe Partition. Zusätzlich zu den in Beispiel (4) zugelassenen Permutationen von R dürfen jetzt auch alle Permutationen von D angewandt werden, ohne, dass sich die entstehende Partition ändert. Mithin ist hier M die Menge aller surjektiven Abbildungen $\varphi \in R^D$, wobei R als auch D permutiert werden darf.

Quintessenz: Alle 5 Beispiele konnten darauf zurückgeführt werden, die Anzahl gewisser Abbildungen $\varphi : D \rightarrow R$ zu bestimmen. Dabei sind 4 Fragestellungen aufgekommen:

1. Wieviele allgemeine Abbildungen gibt es?
2. Wieviele injektive Abbildungen gibt es?
3. Wieviele surjektive Abbildungen gibt es?
4. Wieviele bijektive Abbildungen gibt es?

Des Weiteren haben wir Abbildungen manchmal identifiziert, wenn sie durch eine Permutation des Definitionsbereichs D und des Wertebereichs R ineinander übergingen. Von den möglichen Permutationsgruppen G bzw. H über D bzw. R lassen wir hier nur zwei Extremfälle zu, nämlich

$$G = \begin{cases} \{\varepsilon_D\} & \text{, die triviale Permutationsgruppe, die nur die identische Permutation auf } D \text{ enthält.} \\ S_D & \text{, die symmetrische Gruppe über } D, \text{ d.h. die Gruppe aller Permutationen von } D. \end{cases}$$

$$\text{bzw. } H = \begin{cases} \{\varepsilon_R\} \\ S_R \end{cases}.$$

So ergeben sich 4 Fälle:

	G	H
Normalfall	$\{\varepsilon_D\}$	$\{\varepsilon_R\}$
*	S_D	$\{\varepsilon_R\}$
**	$\{\varepsilon_D\}$	S_R
***	S_D	S_R

Wir identifizieren die Abbildungen φ und φ' , wenn es ein $\delta \in G$ und ein $\rho \in H$ gibt mit $\varphi' = \rho \cdot \varphi \cdot \delta$, d.h., wenn für alle $i \in D$ gilt $\varphi'(i) = \rho(\varphi(\delta(i)))$.

Definition 1.1:

Aufgabe der Kombinatorik ist die Bestimmung der Anzahl der nicht zu identifizierenden Abbildungen $\varphi \in R^D$ in allen 4 Fragestellungen und allen 4 Fällen.

1. Einführung

Wir haben also 16 Probleme:

Fragestellung \ Fall	Normalfall	* (D perm.)	**(R perm.)	*** (D, R perm.)
1) Abbild. ($d > 0, r > 0$)	Beispiel 2			
2) inj. Abb. ($r \geq d > 0$)		Beispiel 3		
3) surj. Abb. ($d \geq r > 0$)			Beispiel 4	Beispiel 5
4) bij. Abb. ($d = r > 0$)	Beispiel 1			

Die Fragestellungen sind jeweils nur sinnvoll, wenn $d = |D|$ und $r = |R|$ in der gegebenen Beziehung zueinander stehen, zum Beispiel kann es keine injektive Abbildung $\varphi : D \rightarrow R$ geben, wenn $d > r$ ist.

Satz 1.2 (zu Problem 1, bzw. Beispiel 2)

Die Anzahl $v(d, r)$ der Abbildungen von D nach R (genannt Variationen) beträgt

$$v(d, r) = r^d.$$

Beweis (-idee): R^D ist bijektiv abbildbar auf $R^d := \underbrace{R \times \dots \times R}_{d\text{-mal}}$. Mit Isomorphieregel und vollständiger Induktion über d zeige $|R^D| = |R^d| = r^d$. ■

Satz 1.3 (zu Problem 2)

Sei $r \geq d \geq 0$. Die Anzahl der injektiven Abbildungen aus R^D beträgt

$$\text{„}d \text{ unter } r\text{“} := (r)_d = r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot (r-d+1) = \frac{r!}{(r-d)!}.$$

Beweis (Vollständige Induktion über d): Wegen der Isomorphieregel können wir ohne Einschränkung $D = \{1, \dots, d\}$ annehmen.

Ind.Anfang: ($d = 1$) Jede Abbildung von $D = \{1\}$ nach R ist injektiv. Also ist mit Satz 1.2

$$(r)_1 = |R^{\{1\}}| = v(r, 1) = r.$$

Ind.Schluss: ($d \rightarrow d+1$) Jede injektive Funktion aus $R^{\{1, \dots, d+1\}}$, $r \geq d+1$ hat die Form

$$\begin{cases} f(1) = b_1 & , \text{ für ein beliebiges } b_1 \in R \text{ (dies ist eine Abbildung } f_0 \in R^{\{1\}}) \\ f(2), f(3), \dots, f(d+1) & , \text{ bildet eine injektive Funktion } f_1 \in (R \setminus \{b_1\})^{\{2, \dots, d+1\}} \end{cases}$$

$R \setminus \{b_1\}$ ist für jedes $b_1 \in R$ isomorph zu der Menge $\{1, \dots, r-1\}$. Also entspricht jedem $f_1 \in (R \setminus \{b_1\})^{\{2, \dots, d+1\}}$ genau eine Funktion $\tilde{f}_1 \in \{1, \dots, r-1\}^{\{2, \dots, d+1\}}$. Jede injektive Funktion aus $R^{\{1, \dots, d+1\}}$ lässt sich daher bijektiv auf ein Paar $(f_0, \tilde{f}_1) \in R^{\{1\}} \times \{1, \dots, r-1\}^{\{2, \dots, d+1\}}$ abbilden. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es r Funktionen vom Typ f_0 und nach der Induktionsannahme existieren $(r-1)_d$ Funktionen vom Typ \tilde{f}_1 . Nach der Produktregel gibt es dann $r \cdot (r-1)_d = \dots = (r)_{d+1}$ Paare (f_0, \tilde{f}_1) und nach der Isomorphieregel ebensoviele injektive Funktionen aus $R^{\{1, \dots, d+1\}}$.

1. Einführung

■

Folgerung (Zu Problem 4 bzw. Beispiel 1): Sei $d = r > 0$. Dann beträgt die Anzahl der bijektiven Abbildungen aus R^D

$$r! = d!.$$

Beweis: Da $d = r$ ist, ist jede injektive Funktion auch bijektiv. Satz 1.3 liefert daher

$$\# = (r)_d = (d)_d = d! = r!.$$

■

Bemerkung: Gewöhnlich nimmt man $R = D = N = \{1, \dots, n\}$ und kommt dann auf $n!$ Bijektionen von N auf N , die auch Permutationen genannt werden.

Von den injektiven Abbildungen in Beispiel 3 (Problem *) wurden diejenigen identifiziert, die sich nur um eine Permutation des Definitionsbereiches unterscheiden. Durch die Identifizierung wird die Menge der injektiven Abbildungen in Klassen aufgeteilt (Klasseneinteilung entspricht einer Äquivalenzrelation).

In jeder Klasse liegen genau $|S_D| = d!$ injektive Abbildungen (die die gleiche Auswahl bewirken). So geht in Beispiel 3 die Abbildung

$$\varphi(1) = Mo, \varphi(2) = Mi, \varphi(3) = Sa$$

unter der Permutation $(12)(3)$ über in

$$\varphi'(1) = Mi, \varphi'(2) = Mo, \varphi'(3) = Sa.$$

Verschiedene Auswahlen führen auf verschiedene injektive Abbildungen. Somit haben wir eine disjunkte Zerlegung der Menge M aller injektiven Abbildungen $\varphi \in R^D$ in $\#$ viele Klassen mit $d!$ Elementen:

$$M = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_{\#}$$

Nach der Quotientenregel gilt

$$\# = \frac{|M|}{d!} = \frac{(r)_d}{d!} = \binom{r}{d}.$$

Folgerung (Problem 4): Sei $d = r = n$. Dann ist

$$C(r, r) = C(d, d) = C(n, n) = \binom{n}{n} = 1,$$

d.h. es gibt genau eine Auswahl von r Elementen aus n Elementen, bzw. alle Abbildungen $\varphi : N \rightarrow N$ unterscheiden sich nur um eine Permutation des Definitionsbereiches.

1. Einführung

Satz 1.4 (zu Problem 2*)

Sei $r \geq d > 0$. Die Anzahl $C(r, d)$ der Kombinationen aus \mathbb{R}^D beträgt

$$C(r, d) = \binom{r}{d}.$$

Die Größen $C(n, k) = \binom{n}{k}$ sind als **Binomialkoeffizienten** wohlbekannt.

- Binomischer Lehrsatz:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- beim Ausmultiplizieren von $(a + b)^n$ gibt es genau $\binom{n}{k}$ Kombinationen zur Bildung von $a^k b^{n-k}$.
- für $a = b = 1$ erhält man

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

die Anzahl aller Teilmengen von N

-

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k},$$

kombinatorisch gedeutet: Jede Auswahl von k Elementen aus N entspricht eindeutig einer Auswahl von $n - k$ jeweils „übriggebliebenen“ Elementen

Die Probleme 1* und 3* lassen sich auf Auswahlen zurückführen. Die zugehörigen Formeln sind Binomialkoeffizienten, die sich durch eine geeignete Zählung von Kombinationen ergeben.

1.1. Repetitionen

Zu Problem 1*: Gesucht ist die Anzahl beliebiger $\varphi \in \mathbb{R}^D$, wobei Permutationen über D gestattet sind. Es kommt nicht auf die Reihenfolge der Funktionswerte an und im Unterschied zu Kombinationen brauchen die Funktionen auch nicht injektiv zu sein, d.h. Wiederholungen von Funktionswerten sind zulässig.

Man spricht daher von „Kombinationen mit Wiederholungen“ oder Repetitionen. Jede Repetition wird durch ihre Funktionswerte eindeutig beschrieben. Diese bilden eine sogenannte Multimenge, d.h. eine Menge, in der sich Elemente wiederholen dürfen.

Formal: Eine Multimenge ist eine Abbildung $u : R \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j \in R} u(j) = d.$$

1. Einführung

Beispiel: $r = 6, d = 3$:

j	1	2	3	4	5	6
u(j)	0	1	0	2	0	0

Achtung! Die Anzahl der Funktionen, die auf die selbe Multimenge führen, kann unterschiedlich sein: die Quotientenregel scheidet daher (diesmal) aus.

Wir können aber eine Bijektion zwischen den Repetitionen bzw. Multimengen und gewissen Zeichenfolgen über $\{o, \times\}$ finden:

Betrachte Folgen von $r - 1$ Kreuzen und d Kreisen, im Beispiel also $r - 1 = 5$ Kreuze und 3 Kreise.

$$\{2, 4, 4\} \Leftrightarrow \times o \times \times o o \times \times .$$

Jede solche Folge von $r - 1$ Kreuzen und d Kreisen kann als Codierung der Wertetabelle einer Multimenge gedeutet werden. Schreibt man r Zahlen, so entstehen $r - 1$ Lücken. Die Lücken kann man durch $r - 1$ Kreuze darstellen und zwischen je zwei Kreuzen (bzw. vor das erste oder hinter das letzte Kreuz) so viele Kreise machen, wie die entsprechende Zahl angibt.

Beispiel:

$$\{1, 3, 4\} \Leftrightarrow o \times \times o \times o \times \times$$

$$\{6, 6, 6\} \Leftrightarrow \times \times \times \times \times o o o$$

Wir erhalten damit eine Bijektion von einer Repetition auf eine Zeichenfolge und aufgrund der Isomorphieregel genügt es die Anzahl solcher Folgen von Kreuzen und Kreisen zu bestimmen. Die Länge der Folgen beträgt $(r - 1) + d$; nach Satz 2* gibt es genau $\binom{r-1+d}{d}$ Kombinationen, d Kreise auf $r - 1 + d$ Plätze zu verteilen; also existieren $\binom{r-1+d}{d}$ derartige Folgen. Für das Beispiel $r = 6, d = 3$ gibt es also $\binom{8}{3} = 56$ Repetitionen.

Satz 1.5 (Problem 1*)

Für Problem 1* gilt

$$\# = \binom{r + d - 1}{d} = \binom{r + d - 1}{r - 1}.$$

Beweis (alternativ): Induktiv über r : Für „ $r \rightarrow r + 1$ “ unterscheide, ob die $(r + 1)$ -te Zahl 0-mal, 1-mal, ..., d -mal vorkommt. Erhalte damit $\sum_{i=0}^d \binom{r+d-1-i}{d-i} \stackrel{!}{=} \binom{(r+1)+d-1}{d}$. Anwendung der Pascalschen Dreiecksregel:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Zu Problem 3*: Wir zählen wie im Satz 1.5 Repetitionen ab, die hier zusätzlich aber auch surjektiv sein müssen. Notwendig ist daher $d \geq r$. ■

1. Einführung

Beispiel ($r = 6, d = 8$):

$$\{1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6\} \Leftrightarrow \circ \times \circ \circ \times \circ \times \circ \circ \times \circ \times \circ.$$

Da wegen der Surjektivität jede Zahl aus R mindestens einmal vorkommen muss, genügt auch die folgende Beschreibung, die durch Streichen je eines Kreises in jeder Zeile entsteht:

$$\times \circ \times \times \circ \times \times.$$

Dazu berechnet man $r - 1$ Kreuze und nur noch d Kreise. Jede surjektive Repetition ist also bijektiv abbildbar auf solche Folgen von $r - 1$ Kreuzen und $d - r$ Kreisen, also

Satz 1.6 (Zu Problem 3*)

Für Problem 3* gilt

$$\# = \binom{(r-1) + (d-r)}{r-1} = \binom{d-1}{r-1}.$$

Die Probleme 3*** (Partitionen) und 3** (Äquivalenzrelationen) führen auf neue (Anzahl-) Funktionen, die durch Rekursionsformeln berechnet werden können.

1.2. Partitionen

Im Problem 3*** (zu Beispiel 5) wird die Anzahl der Partitionen von $d(n)$ in $r(k)$ Summanden gesucht. Diese Anzahl wird üblicherweise mit $p(n, k)$ bezeichnet.

Wir setzen $p(n, k) = 0$ für $n < k$, da n nur dann als Summe von k (positiven ganzzahligen) Summanden dargestellt werden kann, wenn $n \geq k$ ist. Weiter gilt: $p(n, 1) = p(n, n) = 1$ für $n \geq 1$.

Satz 1.7 (Rekursionsformel für die Anzahl der Partitionen:)

Für $n > k > 1$ gilt

$$p(n, k) = p(n - k, k) + p(n - 1, k - 1).$$

Beweis: Man kann Partitionen durch Ferrers-Graphen (auch Young-Tableaus) beschreiben: Jeder Summand wird durch eine Zeile mit der entsprechenden Anzahl von Punkten dargestellt, z.B.

$$8 = 3+3+2 = 4+3+1$$

Die Reihenfolge der Summanden ist nicht relevant, i.A. ordnet man sie der Größe nach an. Jede Bijektion entspricht in bijektiver Weise einem Ferrers-Graphen. Wir zerlegen nun die Menge $M(n, k)$ aller Partitionen von n in k Summanden in zwei Klassen:

1. Einführung

1. alle Summanden sind ≥ 2
2. es gibt wenigsten einen Summanden = 1

Jede dieser beiden Klassen wird nun mit Hilfe der Ferrers-Graphen bijektiv auf eine geeignete Klasse von Partitionen abgebildet. Zu 1.: Streiche die linke Spalte in den Ferrers-Graphen dieser Partitionen. Dann bleibt in jeder Zeile mindestens ein Punkt übrig. Die entstehenden Ferrers-Graphen stellen dann Partitionen der Zahl $n - k = n - k - 1$ mit k Summanden dar. Ihre Anzahl beträgt $p(n - k, k)$.

Zu 2.: Streiche eine Zeile mit einem Punkt. Die so entstehenden Ferrers-Graphen stellen dann Partitionen der Zahl $n - 1$ mit $k - 1$ Summanden dar. Die Anzahl beträgt $p(n - 1, k - 1)$. Nach der Additionsregel erhalten wir

$$p(n, k) = |M(n, k)| = p(n - k, k) + p(n - 1, k - 1).$$

■

Definition 1.2:

Die Anzahl aller Partitionen von n wird mit P_n bezeichnet, d.h.

$$P_n := \sum_{k=1}^n p(n, k) \text{ für } n \geq 1;$$

wir setzen $P_0 = 1$.

Mit Hilfe der Rekursionsformel lassen sich $p(n, k)$ und P_n sukzessiv berechnen. Die Folge der P_n wächst schnell, so ist z.B.

$$P_{500} = 2.300.165.032.574.323.995.027;$$

mehr dazu später.

1.3. Äquivalenzrelationen

Zu Problem 3 **: Gesucht ist die Anzahl $S(d, r)$ der Äquivalenzrelationen über D mit $r = |R|$ Klassen bzw. wie viele Zerlegungen einer n -elementigen Menge in k disjunkte nicht leere Teilmengen gibt es?

Die $S(n, k)$ heißen Stirlingzahlen 2. Art.

Bemerkung: Es gibt auch Stirlingzahlen 1. Art ($s(n, k)$). Damit wird die Anzahl der Permutationen aus S_n mit $N = \{1, \dots, n\}$ bestimmt, die in k Zyklen zerfallen.

Satz 1.8 (Rekursionsformel für die Stirling-Zahlen 2. Art)

$$S(n, 1) = S(n, n) = 1 \text{ für } n \geq 1.$$

Für $n > k > 1$ gilt

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k).$$

1. Einführung

Beweis: Wir verwenden ein sogenanntes Pascal-Argument, d.h. wir isolieren ein Element x aus einer n -elementigen Menge N und zerlegen die Menge $M(n, k)$ aller Äquivalenzrelationen in zwei Klassen, je nachdem, was mit x passiert.

1. Das Element x bildet eine Klasse für sich. Dann sind die anderen $n - 1$ Elemente von N auf die $k - 1$ anderen Klassen verteilt. Dazu gibt es $S(n - 1, k - 1)$ Möglichkeiten.
2. Das Element x kommt nicht in eine Klasse für sich. Dann gibt es $S(n - 1, k)$ Zerlegungen von $N \setminus \{x\}$ in k disjunkte, nichtleere Teilmengen. Da x dabei in jeder der k Teilmengen vorkommen kann, gibt es nach der Produktregel $k \cdot S(n - 1, k)$ Zerlegungen.

Addition der Anzahlen aus (1) und (2) gemäß Summenregel ergibt die Rekursionsformel. ■

Definition 1.3:

Die Zahlen

$$b_n := \sum_{k=1}^n S(n, k) \text{ für } k \geq 1$$

heißen Bell-Zahlen. Wir setzen $b_0 := 1$. Für die Bell-Zahlen gilt folgende Rekursionsformel:

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k.$$

Sie wachsen noch schneller als die P_n .

Folgerung (Zu Problem 3): Sei $d \geq r > 0$. Dann gibt es $r! \cdot S(d, r)$ surjektive Abbildungen von D nach R .

Beweis: Gegenüber Problem 3** müssen hier noch die Reihenfolgen der r Klassen, in die R zerlegt wird, beachtet werden. Es gibt $r!$ mögliche Reihenfolgen und somit (Produktregel)

$$r!S(d, r).$$
■

1.4. Zusammenfassung

Fragestellung \ Fall	Normalfall	* (D perm.)	** (R perm.)	*** (D, R perm.)
1) Abbild. ($d > 0, r > 0$)	r^d	$\binom{r+d-1}{d}$	b_d	P_d
2) inj. Abb. ($r \geq d > 0$)	$(r)_d$	$\binom{r}{d}$	1	1
3) surj. Abb. ($d \geq r > 0$)	$r!S(d, r)$	$\binom{d-1}{r-1}$	$S(d, r)$	$p(d, r)$
4) bij. Abb. ($d = r > 0$)	$d!$	1	1	1