6 Zug, Druck und Schub

Bisher wurde besprochen, wie Kräfte und Momente auf einen Körper wirken bzw. durch diesen übertragen werden. Für die Beurteilung der Tragfähigkeit eines Bauteils unter Belastung müssen jedoch auch die Bauteilgeometrie und das verwendete Material berücksichtigt werden.

Um den Einfluss einer Belastung auf die Tragfähigkeit eines Bauteils zu beurteilen, werden die Begriffe der **Beanspruchung** und der **Beanspruchbarkeit** eingeführt.

6.1 Spannungen

Beanspruchungszustände werden durch **Normalspannungen** σ und **Schubspannungen** τ beschrieben. Die Einheit der Spannungen ist

$$1 \text{ Megapascal } = 1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ Newton pro Quadratmilimeter} \tag{1}$$

Spannungen sind somit Flächenkräfte.

6.1.1 Normalspannungen σ

Wird ein eingespannter Stab duch eine Zug- oder Druckkraft belastet, so wird der Stab im Inneren beansprucht. Um die Höhe der Beanspruchung zu quantifizieren, wird das Innere des Stabes freigeschnitten. Wird das Bauteil nur durch eine Längskraft F_L belastet, wird zunächst ideal von einer konstanten Verteilung von **Spannungen** über den Querschnitt ausgegangen.

Je nach Schnittfläche entstehen verschiedene Spannungszustände. Wird der Stab orthogonal zur Wirkungslinie der Kraft geschnitten, so entstehen in der Schnittfläche **Normalspannungen** σ. Diese stehen normal (d.h. rechtwinklig) auf der Schnittfläche und werden durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\text{Kraft orthogonal zur Schnittfläche}}{\text{Schnittfläche}} \tag{2}$$

bestimmt. Zeigt die Normalspannung σ mit positivem Vorzeichen von der Schnittfläche weg, wird von einer **Zugspannung** gesprochen, bei negativem Vorzeichen von einer **Druckspannung**.

6.1.2 Schubspannungen τ

Wird hingegen ein Schnitt in einem beliebigen Winkel zur Kraftrichtung gesetzt, so können zusätzlich **Schubspannungen** τ entstehen. Diese wirken entlang der Schnittfläche und werden durch die Gleichung

$$\tau = \frac{F_T}{A} = \frac{\text{Kraft parallel zur Schnittfläche}}{\text{Schnittfläche}} \tag{3}$$

bestimmt.

6.2 Verformungen

Bisher wurden im Rahmen der Veranstaltung starre Körper behandelt. Starre Körper bewegen sich unter Belastung translatorisch und/oder rotatorisch, solange ihre Bewegungsfreiheit nicht durch Lager blockiert wird. Bei der Betrachtung von starren Körpern wird vernachlässigt, dass sich Körper unter Belastung verformen bzw. defomieren können.

Wird ein Körper durch eine Kraft F belastet, so können sich seine **Gestalt** und sein **Volumen** ändern. In dem Zusammenhang wird von **Verformung** bzw. **Verzerrung** gesprochen.

6.2.1 Dehnungen

Die Verschiebung eines Körperpunktes wird mit u bezeichnet, bzw. mit u_x, u_y, u_z. Um die Verformung zu quantifizieren, wird der Begriff der **Dehnung** eingeführt.

Die Dehnung ε wird definiert über die Längenänderung Δl bezogen auf die Ausgangslänge l.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{4}$$

Allgemein wird die Dehnung als Änderung der Verschiebung nach der Ortsvariablen definiert. Für den Zusammenhang zwischen Dehnung und Verschiebung in x-Richtung gilt:

$$\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} \tag{5}$$

Die Dehnung ist entweder einheitenlos oder wird in % angegeben. Die Einheit der Verschiebung ist Meter oder Milimeter.

$$[\varepsilon] = \text{einheitenlos oder in\%}; \qquad [u] = \text{in m oder mm} \tag{6}$$

In der Technischen Mechanik werden stets kleine Dehnungen

$$\varepsilon \leq 5\% \tag{7}$$

angenommen. Zwischen Normalspannungen σ und Dehnungen ε besteht ein funktionaler Zusammenhang über das **Werkstoffgesetz** bzw. das **Materialverhalten**. Dehnungen beschreiben somit die Verformungen orthogonal zur Schnittfläche, die durch die Normalspannungen σ verursacht werden.

6.2.2 Gleitungen

Neben den Dehnungen muss der Begriff der **Gleitungen** eingeführt werden. Während die Normalspannungen σ Dehnungen ε normal zur Schnittfläche bewirken, führen die Schubspannungen τ zu **Gleitungen** γ. Die Gleitung γ beschreibt dabei die Änderung eines 90°-Winkels infolge der erfahrenen Beanspruchung.

Die Gleitung ist entweder einheitenlos oder wird in Grad oder Rad angegeben.

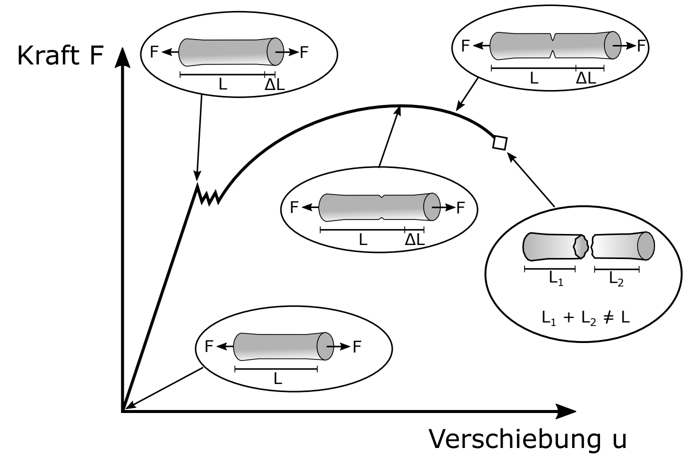
$$[\gamma] = \text{rad oder }^\circ \tag{8}$$

Zwischen Schubspannungen τ und Gleitungen γ besteht ein funktionaler Zusammenhang über das **Werkstoffgesetz** bzw. das **Materialverhalten**. Gleitungen beschreiben somit die Verformungen, die durch Schubspannungen verursacht werden.

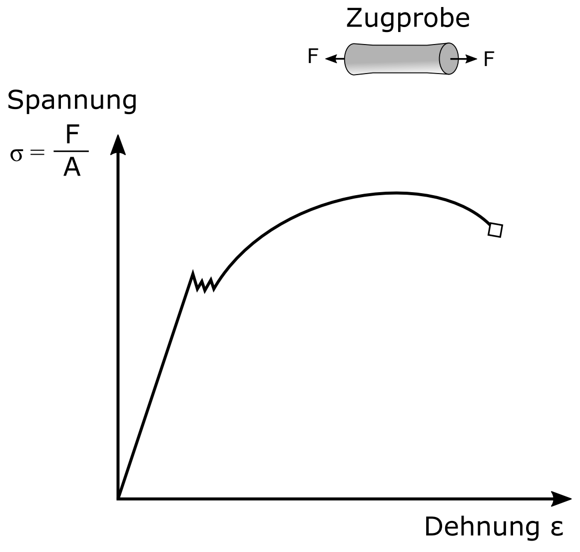
$$\text{Gleitung} + \text{Dehnung} = \text{Verzerrung} \tag{9}$$

6.3 Materialverhalten

Das Materialverhalten beschreibt den Zusammenhang zwischen den Beanspruchungen σ und τ und den Verzerrungen ε und γ und somit die **Beanspruchbarkeit** des Werkstoffs. Das Materialverhalten eines Werkstoffes muss dabei experimentell bestimmt werden. In der experimentellen Mechanik werden dafür **Zugversuche** an kleinen Probekörpern durchgeführt, um das Materialverhalten bestimmen zu können. Innerhalb der Vorlesungen werden nur **duktile** Werkstoffe wie Stahl oder auch Aluminium behandelt. Wird eine duktile Werkstoffprobe gezogen und die Verschiebung immer weiter gesteigert, so kann ein Kraft-Verschiebungs-Diagramm erstellt werden. Dabei verformt sich die Probe mit zunehmender Verschiebung, bis es zum Bruch kommt.

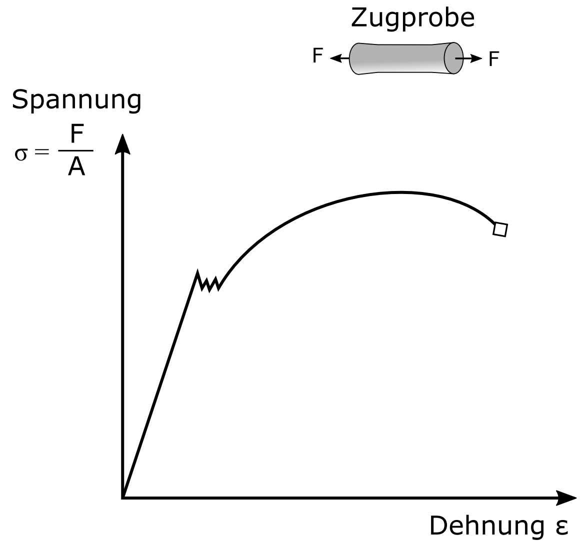


Da das Materialverhalten unabhängig von der Geometrie ist, wird das Materialverhalten im Allgemeinen als Spannungs-Dehnungs-Diagramm dargestellt.



Duktile Materialen weisen ein **elastisch-plastisches** Materialverhalten auf, d.h. ein Teil der Verformungen geht nach der Entlastung ($\sigma = 0$) zurück. Dehnungen ε können dabei in einen elastischen ε_{el} (geht nach der Entlastung zurück) und einen plastischen ε_{pl} (ändert sich bei Entlastung nicht) Anteil zerlegt werden:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} \tag{10}$$



In der Technischen Mechanik wird nur der elastische Anteil der Dehnungen betrachtet und der plastische Anteil vernachlässigt $\varepsilon_{pl} = 0$. Es gilt

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} \tag{11}$$

Der Zusammenhang zwischen Spannungen σ und Dehnungen ε wird dabei über das **Hooke'sche Gesetz** beschrieben

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{12}$$

Der Elastizitätsmodul E ist ein Werkstoffkennwert und wird aus dem Zugversuch bestimmt. Ein Werkstoffkennwert ist nur vom Material abhängig und nicht von der Probengeometrie oder den Prüfbedingungen. Werkstoffkennwerte charakterisieren das Materialverhalten.

Material	Stahl	Aluminium	Gummi
Elastizitätsmodul E in MPa			

Wird statt ein Zugversuch ein Scherversuch durchgeführt, so kann der Schubmodul G bestimmt werden, der den Zusammenhang aus Schubspannungen τ und Gleitungen γ im Elastischen beschreibt. Auch der Schubmodul ist ein Werkstoffkennwert.

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{13}$$

6.4 Beispiele

Vorgehen:

1. Freischnitt und Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen
2. Materialgesetze aufstellen
3. Verformungsbetrachtung (Kinematik)
4. Lösung des Gleichungssystems

6.4.1 Zugstab - Statische Beanspruchung

6.4.2 Abgesetzter Stab

6.4.3 Balken mit verformbaren Stäben

6.5 Temperatureinfluss

Bauteile verformen sich unter Temperatureinfluss (=thermische Belastung). Die Gesamtdehnung ε ergibt sich als Summation aus elastischer Dehnung ε_{el} und thermischer Dehnung ε_{th}.

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{th} \tag{14}$$

Der Zusammenhang zwischen thermischen Dehnungen und Temperatur wird über den **thermischen Ausdehnungskoeffizienten** α_T und die **Temperaturdifferenz** ΔT aufgestellt.

$$\varepsilon_{th} = \alpha_T \cdot \Delta T \tag{15}$$

Der thermische Ausdehnungskoeffizient α_T ist ein Werkstoffkennwert und kann experimentell bestimmt werden. Die Einheit des thermischen Ausdehnungskoeffizienten ist 1/Kelvin.

$$[\alpha_T] = \frac{1}{K} \tag{16}$$

Merke: Die Temperaturdifferenz ΔT muss deshalb in Kelvin angegeben werden!

Material	Stahl	Aluminium	Gummi
Thermischer Ausdehnungskoeffizient α_T in $[1/K]$			

6.6 Grenzwerte der Zulässigkeit

Bei der Dimensionierung eines Bauteils müssen Grenzwerte eingehalten werden. Ziel ist es dabei, dass die Beanspruchung eines Bauteils kleinergleich der Beanspruchbarkeit bleibt.

$$\text{Beanspruchung} \leq \text{Beanspruchbarkeit} \tag{17}$$

Als Beispiele für Grenzwerte sind zu nennen

1. Die zulässige Spannung σ_{zul} mit

$$\sigma_{zul} = \min\left[\frac{\sigma_F}{s_F}; \frac{\sigma_B}{s_B}\right] \tag{18}$$

   mit der Fließgrenze σ_F, der Zugfestigkeit σ_B und den Sicherheitsbeiwerten $s_B,\ s_F$.

2. Die zulässige Verformung ε_{zul}

3. Die zulässige Verschiebung u_{zul}

6.7 Beispiel Zugstab - Thermische Beanspruchung

6.8 Mehrachsigkeit in der Ebene

6.8.1 Mehrachsiger Spannungszustand

Wird ein infinitesimales Flächenstück aus einem Zugstab in beliebigem Winkel herausgeschnitten, so entstehen am Flächenelement Normal- und Schubspannungen in verschiedenen Richtungen. Ein solcher Zustand wird als **mehrachsiger Spannungszustand** bezeichnet.

Jede Schub- und jede Normalspannung wird dabei mit zwei Indizes i und j belegt. Der Index j entspricht der Koordinatenachse, in deren Richtung die Spannung wirkt. Der Index i bezeichnet die Koordinatenachse der Flächennormalen, an deren Fläche die Spannung angreift. Der **Spannungstensor** $\underline{\sigma}$ stellt eine vollständige Charakterisierung des Spannungszustandes dar. Die Koordinaten des Spannungstensors können in einer Matrix dargestellt werden.

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \overset{\text{GGW}}{=} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Aus dem Momentengleichgewicht folgt, dass $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ gelten muss. Die Spannungen σ_{ij} ändern sich in Abhängigkeit vom Schnittwinkel φ. Sind die Schubspannungen $\tau_{xy} = 0$, so wird der entsprechende Schnittwinkel als **Hauptspannungswinkel** und die zugeordneten Normalspannungen werden als **Hauptspannungen** σ_1 und σ_2 bezeichnet.

6.8.2 Mehrachsiger Verzerrungszustand

Wird ein Stab gezogen, so ändert sich nicht nur seine Länge sondern auch sein Querschnitt. Es entstehen somit nicht nur Dehnungen in Kraftrichtung, sondern auch in den anderen beiden Achsrichtungen.

Auch die Dehnungen und Gleitungen können in einem **Verzerrungstensor** $\underline{\varepsilon}$ dargestellt werden.

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \tag{20}$$

6.8.3 Hooke'sches Gesetz

Um das Werkstoffgesetz für mehrachsige Spannungs- und Verzerrungszustände formulieren zu können, muss der Werkstoffkennwert **Querkontraktionszahl** ν eingeführt werden. Die Querkontraktionszahl wird ebenfalls experimentell bestimmt. Das Verhältnis aus Elastizitätsmodul zu Querkontraktionszahl charakterisiert den Zusammenhang zwischen den Normalspannungen und den orthogonal dazu entstehenden Dehnungen. In der Ebene gelten folgende Beziehungen zwischen Dehnungen und Normalspannungen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \tag{21}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \tag{22}$$

Treten außerdem noch Schubspannungen τ_{xy} auf, so wird der Zusammenhang zu den Gleitungen γ_{xy} über den Schubmodul G beschrieben.

$$\tau_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \gamma_{xy} \tag{23}$$

6.8.4 Beispiel Bolzenverbindung