11 Strafterm- und Augmentierte La~~n~~grange-Verfahren

Nichtlineare Optimierung

WS 2020/21

Quizfrage

penalty method

Was ist die Idee eines Straftermverfahrens zur Lösung von Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen?

1 A Man verhindert die Verletzung von Nebenbedingungen durch einen Aufschlag auf die Zielfunktion.

0 B Man belohnt die Erfüllung aller Nebenbedingungen durch eine Reduktion der Zielfunktion.

5 C Man bestraft die Verletzung von Nebenbedingungen durch einen Aufschlag auf die Zielfunktion.

0 D Man bestraft die Verletzung von Nebenbedingungen durch den Wert $+\infty$ in der Zielfunktion.

Quizfrage

Die zu lösenden Teilprobleme in einem Straftermverfahren haben die Form

Zielfunktion Straffkt.

$$\text{Minimiere} \quad \overbrace{f(x)}^{\text{Zielfunktion}} + \underbrace{\gamma}_{\gamma>0}\, \overbrace{\pi(x)}^{\text{Straffkt.}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Welche Bedingungen wird man an die Straffunktion π stellen?

0 A $\begin{cases} \pi(x) > 0 & \text{für zulässige } x \\ \pi(x) < 0 & \text{für unzulässige } x \end{cases}$

7 B $\begin{cases} \pi(x) = 0 & \text{für zulässige } x \\ \pi(x) > 0 & \text{für unzulässige } x \end{cases}$

0 C $\begin{cases} \pi(x) = 0 & \text{für zulässige } x \\ \pi(x) < 0 & \text{für unzulässige } x \end{cases}$

0 D $\begin{cases} \pi(x) < 0 & \text{für zulässige } x \\ \pi(x) = 0 & \text{für unzulässige } x \end{cases}$

Quizfrage

Die zu lösenden Teilprobleme in einem Straftermverfahren haben die Form

$$\text{Minimiere} \quad f(x) + \gamma\,\pi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Wie verfährt man mit dem Strafparameter γ?

0 A Man wählt $\gamma > 0$ einmalig als festen Wert.

0 B Man betrachtet eine Folge $\gamma \to -\infty$.

7 C Man betrachtet eine Folge $\gamma \to \infty$.

2 D Man erhöht $\gamma > 0$ bis auf einen bestimmten Wert.

bei exakten Penaltyfunktionen wie π_1 (ℓ_1-penalty)

Quizfrage

$\pi_2(x) = \frac{1}{2}\|\underbrace{[g(x)]^+}_{=\max\{g(x),0\}}\|^2 + \frac{1}{2}\|h(x)\|^2$

$g(x) \le 0$
$h(x) = 0$

Welche Form hat die quadratische Penalty-Funktion π_2 für die Aufgabe

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & x_1^2 - x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\
\text{unter} \quad & x_1 = x_2^2 && h(x) = x_1 - x_2^2 \\
\text{und} \quad & x_2 \geqslant 0\ ? && g(x) = -x_2
\end{aligned}
$$

$\pi_2(x) = \ldots$

1 A $\frac{1}{2}\left([x_2]^+\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_1 - x_2^2\right)^2$

2 B $\frac{1}{2}\left([-x_2]^+\right)^2 + \frac{1}{2}\left([x_1 - x_2^2]^+\right)^2$

1 C $\underbrace{\frac{1}{2}\left(\min\{0, x_2\}\right)^2}_{= \begin{cases} 0, & x_2 \ge 0 \\ x_2^2, & x_2 < 0 \end{cases}} + \frac{1}{2}\left(x_1 - x_2^2\right)^2$

4 D $\underbrace{\frac{1}{2}\left([-x_2]^+\right)^2}_{= \begin{cases} 0, & x_2 \ge 0 \\ (-x_2)^2, & x_2 < 0 \end{cases}} + \frac{1}{2}\left(x_1 - x_2^2\right)^2$

Quizfrage

Vorteil: Verwandlung einer restringierten Optimierungsaufgabe in eine Folge von unrestringierten Aufgaben

Was ist ein Nachteil von Straftermverfahren mit der quadratischen Penalty-Funktion π_2 ?

1 **A** Man erhält keine Schätzung der Lagrange-Multiplikatoren.

5 **B** Man muss $\gamma \to \infty$ gehen lassen.

2 **C** Für große Werte von γ ist die Hessematrix von $f + \gamma\pi_2$ schlecht konditioniert.

0 **D** γ darf nicht gegen ∞ gehen.

Schätzung der Lagrange-Multiplikatoren

$\mu := \gamma\,[g(x)]^+$ $\qquad\qquad$ $\lambda := \gamma\, h(x)$

Quizfrage

$\mathcal{L}_\gamma^a(x,\lambda) = \mathcal{L}(x,\lambda) + \gamma \pi_2(x)$
$= f(x) + \lambda^T h(x) + \frac{\gamma}{2}\|h(x)\|^2$

Welche Form hat die Augmentierte Lagrange-Funktion zur Aufgabe

$$\text{Minimiere} \quad x_1^2 - x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{unter} \quad x_1 = x_2^2 \; ?$$

$h(x) = x_1 - x_2^2$

$\mathcal{L}_\gamma^a(x,\lambda) = \dots$

$\mathcal{L}(x,\lambda)$

0 A $x_1^2 - x_2 + \lambda\,(x_1 - x_2^2)$

$f(x)$

0 B $x_1^2 - x_2$

0 C $x_1^2 - x_2 + \frac{\gamma}{2}\,(x_1 - x_2^2)^2$

$f(x) + \gamma\pi_2(x)$

7 D $x_1^2 - x_2 + \lambda\,(x_1 - x_2^2) + \frac{\gamma}{2}\,(x_1 - x_2^2)^2$

Augmentierte Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}^a_\gamma(x,\lambda) = \mathcal{L}(x,\lambda) + \gamma\,\pi_2(x)$$
$$= f(x) + \lambda^T h(x) + \frac{\gamma}{2}\|h(x)\|^2$$
$$= f(x) + \frac{1}{2\gamma}\Big(\|\lambda + \gamma h(x)\|^2 - \underbrace{\|\lambda\|^2}_{\text{const bzgl. } x}\Big)$$

$$\Big[= f(x) + \frac{\gamma}{2}\Big(\|\gamma^{-1}\lambda + h(x)\|^2 - \|\gamma^{-1}\lambda\|^2\Big)\Big]$$

$$\mathcal{L}^a_\gamma(x,\lambda,\mu) = f(x) + \frac{1}{2\gamma}\Big(\|\lambda + \gamma h(x)\|^2 - \|\lambda\|^2\Big)$$
$$+ \frac{1}{2\gamma}\Big(\|[\mu + \gamma g(x)]^+\|^2 - \|\mu\|^2\Big)$$

<u>Herleitung</u>: $g(x) \le 0 \iff \boxed{g(x) + s = 0},\ \boxed{s \ge 0}$

Quizfrage

Welche Vorteile bietet ein Augmentiertes Lagrange-Verfahren gegenüber einem Straftermverfahren?

1 A Der Implementierungsaufwand ist nicht höher.

0 B Es kann mit allgemeineren Nebenbedingungen umgehen.

5 C Man braucht nicht $\gamma \to \infty$ laufen zu lassen.

0 D Es konvergiert in einem Schritt.

$$\mathcal{L}^a_\gamma(x,0,0) = f(x) + \frac{\gamma}{2}\|[g(x)]^+\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|h(x)\|^2$$
$$= f(x) + \gamma\,\pi_2(x)$$

λ und μ werden im Verfahren aufdatiert!

Zeit für Ihre Fragen

Was sind Ihre Fragen zu den Themen der Woche?

→ Benutzen Sie den Chat.

Fragen und Antworten 1

Fragen und Antworten 2