1.2 Zahlungsströme und Investitionen

Wir setzen auch in diesem Abschnitt Verzinsung mit Zinseszinsen mit konstantem Zinssatz i über n Perioden voraus, $n \in \mathbb{N}$. (Verzinsungsfaktor $q = 1 + i$)

1.2.1 Bewertung und Äquivalenz von Zahlungsströmen

Definition 1.2: *(Zahlungsstrom)*
Unter einem **Zahlungsstrom** (engl. *cash flow*) versteht man eine (endliche oder unendliche) Folge $(A_t)_{t=0,1,\ldots,n(,\ldots)}$.
Als **Barwert** des Zahlungsstroms bezeichnet man

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n(\text{bzw. } \infty)} \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n(\text{bzw. } \infty)} A_t q^{-t}$$

Der Zahlungsstrom heißt (im unendlichen Fall) **absolut summierbar**, wenn $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{|A_t|}{q^t} < \infty$.

Zeitwert oder **Kapitalwert** des **Zahlungsstroms** zum Zeitpunkt s:

$$K_s = K_0 \cdot q^s = \sum_{t=0}^{n(\text{bzw. } \infty)} A_t q^{s-t}$$

Bemerkungen:

- Das Vorzeichen der Zahlungen gibt die Richtung an, in der das Geld fließt. Vom Standpunkt des Betrachters sind negative Zahlungen Ausgaben und positive Zahlungen Einnahmen. Sind alle $A_t \geq 0$, so spricht man von einem **nicht negativen Zahlungsstrom**.

- Der Barwert gibt den monetären Wert des gesamten Zahlungsstroms zum Zeitpunkt 0 wieder.

- Die absolute Summierbarkeit ist eine eher technische Voraussetzung, die in der Praxis immer erfüllt ist.

Beispiel 1.9: *(Zeitwert eines Zahlungsstroms)*
Eine Bank bietet für Kapitalanleger einen Sparplan an. Die Verzinsung erfolgt mit $i = 3\%$ p.a. Ein Sparer legt folgende Beträge an (Index = Zeitpunkt in Jahren):
$A_0 = A_1 = 1.000€,\ A_2 = 1.500€,\ A_3 = 2.000€$.
Welchem Wert entspricht dieser Zahlungsstrom bei $t = 0$ und $t = 4$?

□

Definition 1.3: *(Äquivalenz)*
Zwei (absolut summierbare) Zahlungsströme $(A_t)_{t=0,1,\dots}$ und $(B_t)_{t=0,1,\dots}$ sind **äquivalent**, wenn ihre Barwerte gleich sind, also

$$\sum_t \frac{A_t}{q^t} = \sum_t \frac{B_t}{q^t}$$

Bemerkungen:

1. Kapitalien kann man auch als Zahlungsströme auffassen (mit nur einer, von null verschiedener Zahlung).
   In diesem Sinne ist jeder (absolut summierbare) Zahlungsstrom äquivalent zu seinem Barwert und allen Zeitwerten.

2. Sind Zahlungsströme nicht äquivalent, so ist derjenige wertvoller, der den größeren Barwert besitzt.
   Barwerte können deshalb zum wertmäßigen Vergleich von Zahlungsströmen verwendet werden.

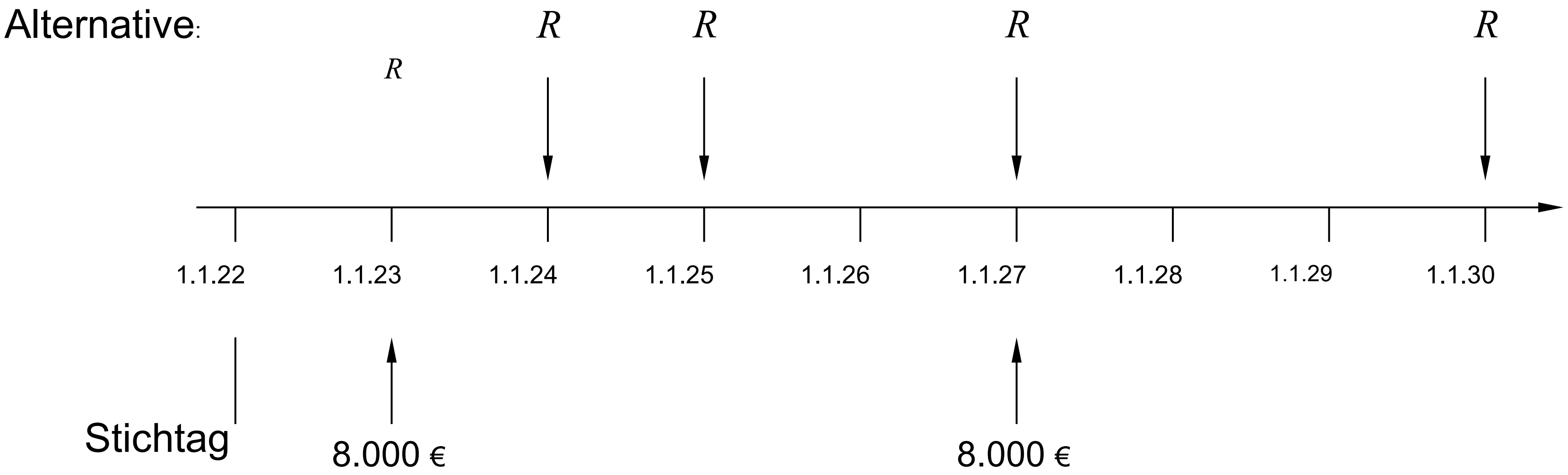
Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik:

(1) In einem vorgegebenen Verzinsungsmodell besitzt jeder (absolut summierbare) Zahlungsstrom einen zwar zeitabhängigen, ansonsten aber eindeutig bestimmten Kapitalwert. Anders gesagt: zu jedem Zeitpunkt gibt es ein eindeutig bestimmtes Kapital, das zu diesem Zahlungsstrom äquivalent ist.
Dieses Kapital errechnet sich als Summe der Barwerte aller Zahlungen, aufgezinst auf den gegebenen Zeitpunkt.

(2) Zahlungsströme können vervielfacht, addiert und verglichen werden, indem dies mit den Kapitalwerten zu einem fest gewählten Zeitpunkt erfolgt, z. B. also mit ihren Barwerten.

(3) Gleiche Kapitalien zu unterschiedlichen Zeitpunkten sind bei positivem Zinssatz nicht äquivalent. Deshalb darf man Kapitalien zu unterschiedlichen Zeitpunkten bei positivem Zinssatz weder vergleichen, noch vervielfachen oder addieren, ohne sie vorher auf einen gemeinsamen Zeitpunkt (Stichtag) ab- bzw. aufzuzinsen.

Beispiel 1.10: *(Äquivalenzprinzip)*
Ein Schuldner muss am 1.1.2023 und am 1.1.2027 je 8.000 € zahlen.
Er möchte stattdessen lieber vier gleich hohe Raten R am 1.1.2024/2025/2027/2030 zahlen.
Wie hoch ist R in einem Verzinsungsmodell mit Zinseszinsen und konstantem Zinssatz von $i = 11\%$ p.a. zu wählen?



$R =$

1.2.2 Investitionen

Voraussetzung: Verzinsung <u>mit Zinseszinsen</u>, (Jahres-)Zinssatz i, Verzinsungfaktor $q = 1 + i$

$K > 0$ **Kapitalaufwand** (Betrag, den der Investor bei $t = 0$ anlegt)

$(A_t)_{t=1,2,\ldots,n}$ Zahlungsstrom der **Rückzahlungen** des Schuldners (Differenzen aus den tatsächlichen Rückflüssen und eventuellen weiteren zu investierenden Beträgen, sog. **Einzahlungsüberschüsse**)

n **wirtschaftliche Nutzungsdauer** des Investitionsobjektes.

<u>Definition 1.4</u>: *(Investitionsprozess)*

Mit obigen Bezeichnung nennt man das $(n+1)$-Tupel $(K, A_1, A_2, \ldots, A_n)$ **Investitionsprozess**.

$$\boxed{G_0 = K_0 - K = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{q^t} - K}$$

(*Nettobarwert einer Investition, NPV*)

$$\boxed{G_0 = K_0 - K = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{q^t} - K}$$

(***Nettobarwert einer Investition, NPV***)

Fallunterscheidung:

- Im Fall $G_0 > 0$ lohnt sich die Investition für den Investor und zwar um so mehr, je größer der Nettobarwert ausfällt.
- Bei $G_0 = 0$ sind investiertes Kapital K und der Barwert der Rückzahlungen K_0 gleich, der Investor macht also weder Gewinn, noch erleidet er einen Verlust.
- Wenn sich hingegen $G_0 < 0$ ergibt, so lohnt sich die Investition aus Sicht des Investors <u>nicht</u>, sein Verlust wäre um so größer, je höher der Betrag des Nettobarwerts ist.

➔ **Kapitalwertmethode**

mit vorgegebenen **<u>Kalkulations</u>zinssatz *i***

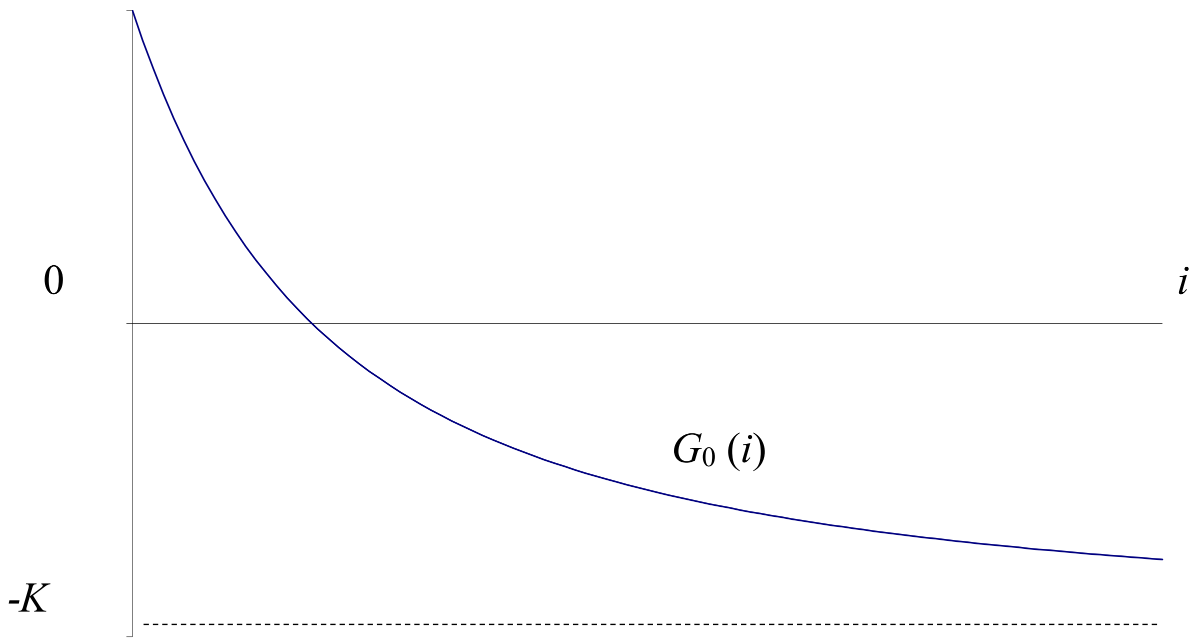
Beispiel 1.11: *(Kapitalwertmethode)*
Für die Einrichtung eines Restaurants sind 315.000 € erforderlich.
In den ersten beiden Jahren werden aufgrund umfangreicher Werbemaßnahmen jeweils 24.000 € (nach Abzug der Einnahmen) benötigt.
Im 3. Jahr rechnet man damit, dass die Einnahmen um 18.000 € überwiegen und dieser Überschuss soll danach jährlich um 20 % (gegenüber dem Vorjahr) wachsen.
Im 7. Jahr soll das Restaurant für 410.000 € wieder verkauft werden.
Vereinfachend erfolgen alle Zahlungen am Jahresende.
Lohnt sich die Investition bei einem Kalkulationszinssatz von 6,2 % p.a. bzw. 6,8 % p.a.?

□

Jetzt Voraussetzung: nicht negativer Zahlungsstrom mit $\sum_{t=1}^{n} A_t > K$

Der Nettobarwert $G_0 = G_0(i)$ ist als Funktion des Kalkulationszinssatzes i streng monoton fallend und streng konvex

$$\sum_{t=1}^{n} A_t - K$$



Definition 1.5: *(innerer Zinssatz)*
Der (bei nichtnegativem Rückzahlungsstrom eindeutig bestimmte) Zinssatz i_0 mit $G_0(i_0) = 0$ heißt **innerer Zinssatz** des Investitionsprozesses.

Fallunterscheidung:

- Im Fall $i < i_0 \Leftrightarrow G_0 > 0$, so lohnt sich die Investition für den Investor und zwar um so mehr, je größer der Unterschied zwischen den Zinssätzen ausfällt.
- Bei $i = i_0 \Leftrightarrow G_0 = 0$ sind investiertes Kapital K und der Zahlungsstrom der Rückzahlungen äquivalent, der Investor macht also weder Gewinn noch Verlust.
- Bei $i > i_0 \Leftrightarrow G_0 < 0$ hingegen lohnt sich die Investition aus Sicht des Investors nicht, sein Verlust wäre um so höher, je größer der Unterschied beider Zinssätze ist.

➔ **Innerer-Zinssatz-Methode**

Bemerkung:
Berechnung des inneren Zinssatzes ist eine (nichtlineare/polynomiale) Gleichung, $G_0(q) = 0$ (bzw. $f(q) = 0$ nach Umstellen) für $q = i_0 + 1$ zu lösen
Im Allg. keine geschlossene Lösungsformel!

➔ Iterationsverfahren zur näherungsweisen Nullstellenbestimmung notwendig, $f(q) = 0$
z.B. (kurzer Exkurs iterative Nullstellensuche):

- Bisektion (Intervallhalbierung):
  Wähle Startintervall $[a, \sim b]$ in dem $f(.)$ stetig mit $f(a)f(b) < 0$
  dann existiert in $(a, \sim b)$ (mind. eine) Nullstelle von f
  iteriere für $k = 0,1,2, \ldots$:
  $q^{(k)} = \frac{a+b}{2}$
  wenn $f(a)f(q^{(k)}) < 0$, dann $b = q^{(k)}$,
  ansonsten $a = q^{(k)}$

- Newton-Verfahren; $f(.)$ stetig differenzierbar, Startwert $q^{(0)} \approx q$

$$q^{(k+1)} = q^{(k)} - \frac{f\left(q^{(k)}\right)}{f'\left(q^{(k)}\right)}, \quad k = 0,1,2, \ldots$$

- Sekantenverfahren (Newton mit $f'\left(q^{(k)}\right) \approx \frac{1}{h}\left(f(q^{(k)} + h\right) - f(q^{(k)}))$)
- ……

Beispiel 1.12: *(Innerer Zinssatz)*

Ein Mehrfamilienhaus wird zum Kauf für 1,4 Mio. € angeboten.
Die (jährlich nachschüssigen) geschätzten Mieteinnahmen betragen abzüglich notwendiger Aufwendungen zur Instandhaltung 100.000 € und steigen aller 5 Jahre um 10.000 €.
Zu bestimmen ist der innere Zinssatz, wenn die Immobilie nach 20 Jahren für 1 Mio. € wieder verkauft wird.

Ansatz: ________________________________

$$q = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \Rightarrow i_0 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$