Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Prof. Dr. A. Voß-Böhme, Dr. K. Fischer

Sommersemester 2023
Abgabe am 12. Mai 2023

Wirtschaftsmathematik II
Hausaufgabe 3

Fotografieren/scannen Sie Ihre **handschriftlichen** Lösungen (mit Namen und Matrikelnummer) und laden Sie diese als **genau eine** PDF-Datei **bis Freitag, 12.05.2023, 23:00 Uhr** im OPAL-Kurs unter Hausaufgaben, 3. Hausaufgabe, hoch.
Der Lösungsweg muss mit Hilfe eines einfachen wissenschaftlichen Taschenrechners (nicht grafikfähig, nicht programmierbar, o.ä.), ohne Benutzung der SOLVE-Funktion, nachvollziehbar sein. Fragen sind mit einem Antwortsatz zu beantworten.

Aufgabe 1: Frau Mathe betreibt eine Cocktailbar und hat einen neuen, einzigartigen, proteinreichen Erfrischungscocktail namens *HapPi* entworfen. Für die Zubereitung hat sie ein Konzentrat entwickelt, welches nur noch mit Wasser oder Crushed-Ice ergänzt wird. Die Kosten für die Herstellung des Konzentrates in Euro in Abhängigkeit von der produzierten Menge x in Litern können mit Hilfe der folgenden Kostenfunktion bestimmt werden:

$$K(x) = 0.08x^3 - 3x^2 + 45x + 625, \quad x \geq 0.$$

(a) Frau Mathe plant 20 Liter des Konzentrates herzustellen, ist sich aber noch nicht ganz sicher. Welche prozentuale Auswirkung hätte eine Erhöhung der Produktionsmenge von 20 Litern um 2 Prozent näherungsweise auf die Kosten? Nutzen Sie zur Beantwortung der Frage eine geeignete Elastizität.

(b) Beründen Sie kurz mit Hilfe der Grenzkostenfunktion und der Stückkostenfunktion, dass für $x = 25$ Liter ein Betriebsoptimum vorliegt. Welchen Preis sollte Frau Mathe langfristig mindestens pro Liter erreichen, um überhaupt in der Lage zu sein die anfallenden Produktionskosten zu decken?

(c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Kostenfunktion und geben Sie die Bereiche in Intervallschreibweise an, in denen die Kostenfunktion K konkav bzw. konvex ist.

(d) Frau Mathe entscheidet sich aus einem Liter Konzentrat 10 Cocktails herzustellen und einen Cocktail dann für 7 Euro zu verkaufen. Ermitteln Sie die Gewinnfunktion G, mit deren Hilfe Frau Mathe den Gewinn in Abhängigkeit von der verbrauchten Menge an Konzentrat berechnen kann und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich. Die Kosten für das Wasser bzw. Crushed-Ice zum Auffüllen können vernachlässigt werden.

(e) Wieviele Liter des Konzentrates muss Frau Mathe herstellen und verkaufen, um maximalen Gewinn zu erzielen? Verwenden Sie zur Beantwortung der Frage die Gewinnfunktion aus Teilaufgabe (d).

(f) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens die untere Gewinnschwelle der Gewinnfunktion aus Teilaufgabe (d). Verwenden Sie dafür den Starwert $x_0 = 15$ und führen Sie die ersten beiden Iterationsschritte durch, d.h. ermitteln Sie x_1 und x_2. Weitere Rechnungen sind nicht verlangt.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe geeigneter Rechnenregeln.

(a) $\lim\limits_{x \searrow 2} \dfrac{\ln(5 - x^2)}{2 - x}$

(b) $\lim\limits_{x \searrow 2} (5 - x^2)^{\frac{1}{2-x}}$

$K(x) = 0.08x^3 - 3x^2 + 45x + 625, \quad x \geq 0.$ K in Euro

$K'(x) = 0{,}24x^2 - 6x + 45 \,, \quad x \geq 0$ x in Litern

a)

Elastizität $\frac{\Delta x}{x} = 1\% = 0{,}01$

$$\frac{\Delta K}{K} = \varepsilon_{f}(x) \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

$$= \frac{K'(x)}{K(x)} \cdot x \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

NR: $K'(20) = 21$

$K(20) = 965$

$$\Delta K = \frac{20}{965} \cdot 20 \cdot 0{,}01$$

$$= 0{,}00415 \approx 0{,}42\,\%$$

Änderung von 2 %

$\Rightarrow 2 \cdot 0{,}00415 = 0{,}00829 \approx 0{,}83\,\%$

Wenn Sie die Produktionsmenge um 2 % erhöhen würde, würden die Kosten näherungsweise um 0,83 % steigen.

b) $x = 25\ l$

Grenzkostenfunktion:

$K'(x) = 0{,}24x^2 - 6x + 45 \quad x \geq 0$

$K'(25) = 45$

Stückkostenfunktion:

$$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{0{,}08x^3 - 3x^2 + 45x + 625}{x}$$

$K'(x) = \bar{K}(x)$

$0{,}24x^2 - 6x + 45 = \frac{0{,}08x^3 - 3x^2 + 45x + 625}{x} \quad |$ für $x = 25$

$\underline{\underline{45 = 45}}$ w. A.

Das Betriebsoptimum liegt bei 25 l.

min. Preis für das Decken der Produktionskosten

↳ Betrachtung der $k_v(x)$ (variablen kosten)

$$k_v(x) = \frac{0{,}08x^3 - 3x^2 + 45x}{x}$$ variable Stückkostenfunktion

$k_v(x) = 0{,}08x^2 - 3x + 45$

$k'_v(x) = 0{,}24x - 3$

$\underline{\underline{x = 12{,}5}}$

$k''_v(x) = 0{,}24$

$k''_v(12{,}5) = 0{,}24 > 0$ → Minimum

$k_v(12{,}5) = 20$ → Min $(12{,}5 \mid 20)$

Auf 1 Liter runtergebrochen:

$= 1{,}6$ €/L

Frau Mathe sollte langfristig mindestens 1,6 €/L verlangen, um nur die Produktionskosten zu decken, dabei sollte sie aber mit min. 12,5 L herstellen und verkaufen.

c) Nullstellen von k:

$k'(x) = 0{,}24x^2 - 6x + 45 \quad | : 0{,}24$

$= x^2 - 25x + 187{,}5$

$x_{1,2} = +\frac{25}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - 187{,}5} \Rightarrow$ kein reeles Erg.

↳ keine Nullstellen ⇒ Schlussfolgerung, entweder immer positiv oder negativ

$k'(0) = 45 \rightarrow$ immer positiv

$k'(x) > 0$ für alle $x \geq 0$

⇒ k streng monoton wachsend

Wendestellen des Graphen:

$k''(x) = 0{,}48x - 6 = 0$

$x = 12{,}5$ (Wendestelle, wenn $k'''(x) \neq 0$)

$k'''(x) = 0{,}48 \neq 0 \rightarrow$ damit Wendestelle bewiesen

Krümmung im Intervall $[0; 12{,}5]$ untersuchen

$k''(10) = 0{,}48 \cdot 10 - 6$

$= -1{,}2 < 0 \rightarrow$ konkav / konvex Wendestelle

Durch Wendestelle konvex danach

Für $x \in [0; 12{,}5]$ gilt $k''(x) \leq 0$, k ist dann konkav.

Für $x \in (12{,}5, \infty)$ gilt $k''(x) > 0$, k ist dann konvex.

(d) Frau Mathe entscheidet sich aus einem Liter Konzentrat 10 Cocktails herzustellen und einen Cocktail dann für 7 Euro zu verkaufen. Ermitteln Sie die Gewinnfunktion G, mit deren Hilfe Frau Mathe den Gewinn in Abhängigkeit von der verbrauchten Menge an Konzentrat berechnen kann und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich. Die Kosten für das Wasser bzw. Crushed-Ice zum Auffüllen können vernachlässigt werden.

Für 1 Cocktail $\frac{1}{10}$ L Konzentrat

$E(x) = p(x) \cdot x$

$= 70x$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$= 70x - (0{,}08x^3 - 3x^2 + 45x + 625)$

$= \underline{\underline{-0{,}08x^3 + 3x^2 + 25x - 625}}$, $x \geq 0$

e) Gewinnfunktion : $G(x) = -0{,}08x^3 + 3x^2 + 25x - 625$

↳ Maximum von $G(x)$

$G'(x) = -0{,}24x^2 + 6x + 25$

$0 = x^2 - 25x - 104{,}17$

$x_{1/2} = 12{,}5 \pm 16{,}14$

$x_1 = 28{,}64$

$x_2 = -3{,}64$ | nicht mit Bedingung übereinstimmend ↳ fällt raus

$G''(x) = -0{,}48x + 6$

$G''(x_1) = -0{,}48 \cdot 28{,}64 + 6$

$= -7{,}75 < 0$ → somit ein Maximum

Frau Mathe muss 28,64 L Konzentrat zur Herstellung verwenden und die Cocktails verkaufen, um maximalen Gewinn zu erzielen.

(f) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens die untere Gewinnschwelle der Gewinnfunktion aus Teilaufgabe (d). Verwenden Sie dafür den Starwert $x_0 = 15$ und führen Sie die ersten beiden Iterationsschritte durch, d.h. ermitteln Sie x_1 und x_2. Weitere Rechnungen sind nicht verlangt.

$$x_0 = 15$$

$$G(x) = -0{,}08x^3 + 3x^2 + 25x - 625$$

$$G'(x) = -0{,}24x^2 + 6x + 25$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{G(x)}{G'(x)}$$

$$x_1 = 15 - \frac{-0{,}08 \cdot 15^3 + 3 \cdot 15^2 + 25 \cdot 15 - 625}{-0{,}24 \cdot 15^2 + 6 \cdot 15 + 25}$$

$$= \underline{\underline{12{,}46}}$$

$$x_2 = 12{,}46 - \frac{-0{,}08 \cdot 12{,}46^3 + 3 \cdot 12{,}46^2 + 25 \cdot 12{,}46 - 625}{-0{,}24 \cdot 12{,}46^2 + 6 \cdot 12{,}46 + 25}$$

$$= \underline{\underline{12{,}5}}$$

Die untere Gewinnschwelle liegt bei ca. 12,5.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe geeigneter Rechnenregeln.

(a) $\lim\limits_{x \searrow 2} \frac{\ln(5-x^2)}{2-x}$

(b) $\lim\limits_{x \searrow 2} (5-x^2)^{\frac{1}{2-x}}$

a) $\lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{\ln(5-x^2)}{2-x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$= \lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{\frac{1}{(5-x^2)} \cdot -2x}{-1}$

$- \lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{-2x}{x^2-5} = \lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{-2 \cdot 2}{2^2-5} = \frac{-4}{-1} = \underline{\underline{4}}$

Der Grenzwert der Funktion gegen 2 ist 4.

b) $\lim\limits_{x \downarrow 2} (5-x^2)^{\frac{1}{2-x}} \overset{\text{"}1^\infty\text{"}}{=} \lim\limits_{x \downarrow 2} e^{\frac{1}{2-x} \cdot \ln(5-x^2)}$

$= e^{\lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{\ln(5-x^2)}{2-x}} = \underline{\underline{e^4}}$

NR:

$\lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{\ln(5-x^2)}{2-x} = 4$