

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

TET: Vertiefung Bildladungsmethode

Zusatz-Handout zum Modul ET-12 02 01 im
Diplomstudiengang Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Spiegelungsmethode – formal

Theoretische Elektrotechnik – Vertiefung

Lizenz: CC BY 3.0 DE

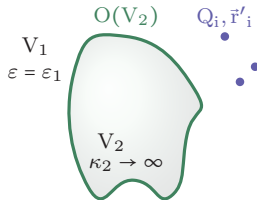


Ausgangspunkt und Zielsetzung

- Die **Spiegelungsmethode** wurde zur Lösung elektrostatischer Randwertprobleme schon vorher betrachtet
(<https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/27455913992/CourseNode/103138906469436/Theoretische%20Elektrotechnik/Elektrostatik/TET-Elektrostatik-V-Spiegelungsmethode.pdf>)
- Beschränkung dabei: **idealleidende** Ränder
- Zielstellung: Erweiterung der Methode auf Grenzen zwischen **dielektrischen** Materialien
- Hierfür wird eine **stärker formalisierte Herleitung** benötigt

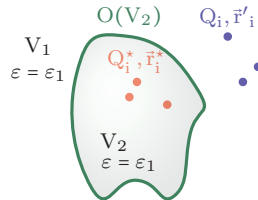
Zunächst: Berandung durch idealen Leiter, geerdet

reales Problem:



$$\begin{aligned}\rho_F &\neq 0 \text{ auf } O(V_2) \\ \phi &= 0 \text{ auf } O(V_2)\end{aligned}$$

Ersatzproblem:



$$\begin{aligned}\rho_F &= 0 \text{ auf } O(V_2) \\ \phi &\stackrel{!}{=} 0 \text{ auf } O(V_2)\end{aligned}$$

Finden der Ersatzladungen und deren Positionen

1. Abbildung der Quellpunkte: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \vec{r}' \rightarrow \vec{r}^* = T(\vec{r}')$ (stetig diff.-bar)
Bildladungen sollen in V_2 liegen: $T(V_1) \subset V_2$
 $O(V_2)$ soll auf sich selbst abgebildet werden: $T(\vec{r}) = \vec{r}$ für $\vec{r} \in O(V_2)$
2. Faktor für Bildladungen: $\lambda: V_1 \cup O(V_2) \rightarrow \mathbb{R}: \vec{r}' \rightarrow \lambda(\vec{r}')$ (stetig diff.-bar)
Ladung auf $O(V_2)$ nicht skalieren: $\lambda(\vec{r}') = 1$ für $\vec{r}' \in O(V_2)$

Insgesamt: $(Q_i, \vec{r}'_i) \rightarrow (Q_i^*, \vec{r}^*_i)$ mit $Q_i^* = -\lambda(\vec{r}'_i) Q_i$ und $\vec{r}^*_i = T(\vec{r}'_i)$ („-“: Konvention)

Ersatzproblem

- Für das **Ersatzproblem** kann das elektrische Skalarpotential $\phi(\vec{r})$ hervorgerufen von den **Originalladungen** (Q_i, \vec{r}'_i) und den **Ersatzladungen** (Q_i^*, \vec{r}'_i^*) direkt mit der **Greenschen Funktion**

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

des homogenen Freiraums $V_2 \cup V_1$ berechnet werden.

- Es gilt somit:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \sum_i [Q_i G(\vec{r}, \vec{r}'_i) + Q_i^* G(\vec{r}, \vec{r}'_i^*)] \\ &= \sum_i [Q_i G(\vec{r}, \vec{r}'_i) - \lambda(\vec{r}'_i) Q_i G(\vec{r}, T(\vec{r}'_i))] \\ &= \sum_i Q_i [G(\vec{r}, \vec{r}'_i) - \lambda(\vec{r}'_i) G(\vec{r}, T(\vec{r}'_i))]\end{aligned}$$

- Für $\vec{r} \in O(V_2)$ muss gelten: $\phi(\vec{r}) = 0$
- Für $\vec{r} \in O(V_2)$ gilt auch: $\lambda(\vec{r}) = 1$ und $T(\vec{r}) = \vec{r}$

Bedingung für Greensche Funktion

- Wir betrachten das Skalarpotential für das Ersatzproblem:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_i Q_i [G(\vec{r}, \vec{r}'_i) - \lambda(\vec{r}'_i)G(\vec{r}, T(\vec{r}'_i))]$$

- Auf der Oberfläche von V_2 muss das Potential verschwinden:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_i Q_i [G(\vec{r}, \vec{r}'_i) - \lambda(\vec{r}'_i)G(\vec{r}, T(\vec{r}'_i))] \stackrel{!}{=} 0 \text{ für } \vec{r} \in O(V_2)$$

- **Hinreichend** dafür ist, dass gilt

$$\lambda(\vec{r}'_i)G(\vec{r}, T(\vec{r}'_i)) \stackrel{!}{=} \lambda(\vec{r})G(T(\vec{r}), \vec{r}'_i)$$

- Denn dann gilt auf $O(V_2)$

$$\lambda(\vec{r}'_i)G(\vec{r}, T(\vec{r}'_i)) = \underbrace{\lambda(\vec{r})}_{=1} \underbrace{G(T(\vec{r}), \vec{r}'_i)}_{=\vec{r}} = G(\vec{r}, \vec{r}'_i) \text{ für } \vec{r} \in O(V_2)$$

- Man bezeichnet dies als **Umwälzen vom Quellpunkt zum Aufpunkt**

Problemangepasste Greensche Funktion

- Mit der Eigenschaft

$$\lambda(\vec{r}'_i)G(\vec{r}, T(\vec{r}'_i)) \stackrel{!}{=} \lambda(\vec{r})G(T(\vec{r}), \vec{r}'_i)$$

ist das Skalarpotential

$$\phi(\vec{r}) = \sum_i Q_i [G(\vec{r}, \vec{r}'_i) - \lambda(\vec{r}'_i)G(\vec{r}, T(\vec{r}'_i))] = \sum_i Q_i [G(\vec{r}, \vec{r}'_i) - \lambda(\vec{r})G(T(\vec{r}), \vec{r}'_i)]$$

Lösung des **ursprünglichen Problems**.

- Denn für $\vec{r} \in V_1 \cup O(V_2)$ gehen hier nur die Originalladungen an den Originalorten ein und die Randbedingung ist automatisch erfüllt.
- Die **problemangepasste Greensche Funktion** ist damit

$$G^*(\vec{r}, \vec{r}'_i) = G(\vec{r}, \vec{r}'_i) - \lambda(\vec{r})G(T(\vec{r}), \vec{r}'_i)$$

- Das Problem reduziert sich somit auf das Finden der Abbildungen T und λ
→ einfache Beispiele

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

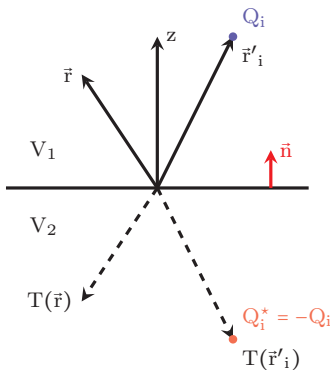
Spiegelungsmethode – Beispiele

Theoretische Elektrotechnik – Vertiefung

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Spiegelung an einer Ebene



- Abbildung T intuitiv klar

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \vec{r} \rightarrow T(\vec{r})$$

$$T(\vec{r}) = \vec{r} - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r})$$

- Funktion λ intuitiv klar:

$$\lambda: V_1 \cup O(V_2) \rightarrow \mathbb{R}: \vec{r}' \rightarrow \lambda(\vec{r}')$$

$$\lambda(\vec{r}') = 1$$

- Anforderungen offensichtlich erfüllt: Bildladungen in V_2 , $O(V_2)$ wird auf sich selbst abgebildet, $\lambda(\vec{r}') = 1$ für $\vec{r}' \in O(V_2)$

- Für $\phi = 0$ auf $O(V_2)$: Umwälzen von Quellpunkt zum Aufpunkt:

$$\lambda(\vec{r}'_i)G(\vec{r}, T(\vec{r}'_i)) \stackrel{!}{=} \lambda(\vec{r})G(T(\vec{r}), \vec{r}'_i) \text{ erfüllt, weil } G \text{ nur vom Abstand abhängt}$$

Umwälzung formal nachrechnen

- Nachrechnen, dass $T(T(\vec{r})) = \vec{r}$ ist:

$$\begin{aligned}T(T(\vec{r})) &= T(\vec{r} - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r})) \\&= \vec{r} - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}) - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \{\vec{r} - 2(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}\}) \\&= \vec{r} - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}) - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r} - 2\vec{n} \cdot \vec{r}) \\&= \vec{r} - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}) - 2\vec{n}(-\vec{n} \cdot \vec{r}) = \vec{r}\end{aligned}$$

- Betrag von $|T(\vec{r})|$:

$$|T(\vec{r})| = |\vec{r} - 2(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n}| = |\vec{r}| \text{ weil nur Vorzeichen der Normalkomponente geändert}$$

- Umwälzung nachrechnen:

$$\begin{aligned}G(\vec{r}, T(\vec{r}')) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{|\vec{r} - T(\vec{r}')|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{|T(T(\vec{r})) - T(\vec{r}')|} \text{ wegen } T(T(\vec{r})) = \vec{r} \\&= \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{|T(T(\vec{r}) - \vec{r}')|} \text{ weil } T \text{ linear ist} \\&= \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{|T(\vec{r}) - \vec{r}'|} \text{ weil } |T(\vec{r})| = |\vec{r}| \\&= G(T(\vec{r}), \vec{r}')\end{aligned}$$

Spiegelung - Problemangepasste Greensche Funktion

- Problemangepasste Greensche-Funktion:

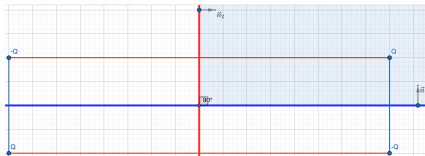
$$\begin{aligned}G^*(\vec{r}, \vec{r}'_i) &= G(\vec{r}, \vec{r}'_i) - \lambda(\vec{r})G(T(\vec{r}), \vec{r}'_i) \\ &= G(\vec{r}, \vec{r}'_i) - \lambda(\vec{r}'_i)G(\vec{r}, T(\vec{r}'_i))\end{aligned}$$

- Mit $\lambda(\vec{r}') = 1$ und $T(\vec{r}') = \vec{r}' - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}')$ folgt:

$$G^*(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - [\vec{r}' - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}')]|} \right)$$

- Mit Hilfe der problemangepassten Greenschen Funktion kann das **Diricletsche Randwertproblem** in $V_1 \cup O(V_2)$ als **Freiraumproblem** gelöst werden. Die Randwerte (hier: Skalarpotential ist Null auf dem Rand) werden automatisch erfüllt.
- Das so gefundene Potential ist **keine Lösung** in $V_2 \setminus O(V_2)$.
- Berechnung der influenzierten Oberflächenladungsdichte aus der (Un-)Stetigkeitsbedingung der Normalkomponente der Dielektrischen Verschiebung (→ TET-Elektrostatik-V-Spiegelungsmethode)
- Gesamtanordnung ist **ungeladen** → kein Monopolterm

Spiegelung an der Kante, 90°



- Kante durch zwei Ebenen \vec{n}_1 und \vec{n}_2
- Spiegelbilder der Spiegelladungen
- Spiegelladungen verboten in V_1
- Interessant: ganzzahlige Teile von 360°

Problemangepasste Greensche-Funktion:

$$\begin{aligned}
 G^*(\vec{r}, \vec{r}') &= G(\vec{r}, \vec{r}') \\
 &\quad - G(\vec{r}, T_{\vec{n}_1}(\vec{r}')) \\
 &\quad - G(\vec{r}, T_{\vec{n}_2}(\vec{r}')) \\
 &\quad + \underbrace{G(\vec{r}, T_{\vec{n}_2}(T_{\vec{n}_1}(\vec{r}')))}_{(-)(-)}
 \end{aligned}$$

Greensche-Funktion des Freiraums

Spiegelung an Ebene \vec{n}_1

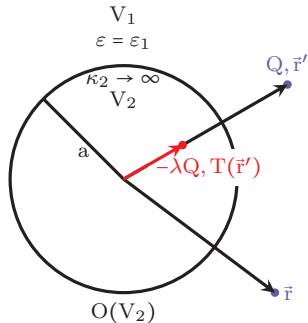
Spiegelung an Ebene \vec{n}_2

Spiegelung der Spiegelung

Spiegelung an der Kante (andere Winkel)

- Interaktive Analyse mit **Geogebra Geometrie**
Webseite: <https://www.geogebra.org>
Online-Version: <https://www.geogebra.org/geometry>
- Datei `Bildladung-36-45-60-72-90.ggb` im OER-Ordner der Professur

Spiegelung an der (geerdeten) Kugel



- Versuche die **Kelvin-Transformation**:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \vec{r}' \rightarrow T(\vec{r}') = \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2} \vec{r}' = a \frac{a}{r'} \vec{e}_{r'}$$

$$\lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \vec{r}' \rightarrow \lambda(\vec{r}') = \frac{a}{|\vec{r}'|}$$

- Für $\vec{r}' \in O(V_2)$: $T(\vec{r}') = \vec{r}'$
- $T(T(\vec{r}')) = T(a \frac{a}{r'} \vec{e}_{r'}) = a \frac{a}{a \frac{a}{r'}} \vec{e}_{r'} = \vec{r}'$
- Regel der **reziproken Radien**:

$$|\vec{r}'| |T(\vec{r}')| = a^2$$

- Die grundlegenden Bedingungen an die Transformation sind erfüllt.
- Hinreichende Bedingung für $\phi = 0$ auf $O(V_2)$: Umwälzung von Quellpunkt und Aufpunkt

Kugel: Umwälzung von Quellpunkt und Aufpunkt

- Zu zeigen: $\lambda(\vec{r}')G(\vec{r}, T(\vec{r}')) \stackrel{!}{=} \lambda(\vec{r})G(T(\vec{r}), \vec{r}')$
- Zunächst:

$$\begin{aligned} |T(\vec{r}) - \vec{r}'|^2 &= \left| \frac{a^2}{|\vec{r}|^2} \vec{r} - \vec{r}' \right|^2 = \frac{a^4}{|\vec{r}|^2} - \frac{2a^2}{|\vec{r}|^2} \vec{r} \cdot \vec{r}' + |\vec{r}'|^2 \\ &= \frac{|\vec{r}'|^2}{|\vec{r}|^2} \left[\frac{a^4}{|\vec{r}'|^2} - \frac{2a^2}{|\vec{r}'|^2} \vec{r} \cdot \vec{r}' + |\vec{r}|^2 \right] = \frac{|\vec{r}'|^2}{|\vec{r}|^2} \left| \vec{r} - \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2} \vec{r}' \right|^2 \\ &= \frac{|\vec{r}'|^2}{|\vec{r}|^2} |\vec{r} - T(\vec{r}')|^2 \end{aligned}$$

- Damit:

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{r}')G(\vec{r}, T(\vec{r}')) &= \frac{a}{|\vec{r}'|} \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{|\vec{r} - T(\vec{r}')|} = \frac{a}{|\vec{r}'|} \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|} \frac{1}{|T(\vec{r}) - \vec{r}'|} \\ &= \frac{a}{|\vec{r}|} \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}'|} \frac{1}{|T(\vec{r}) - \vec{r}'|} = \lambda(\vec{r})G(T(\vec{r}), \vec{r}') \end{aligned}$$

- Problemangepasste Greensche Funktion: $G^*(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}, \vec{r}') - \lambda(\vec{r}')G(\vec{r}, T(\vec{r}'))$

Isolierte Kugel – Greensche-Funktion

- Bisher: **geerdete Kugel** → beim Einbringen der Punktladung ändert sich die Ladung der Kugel durch elektrostatische Influenz.
- Kann man auch eine **isolierte Kugel** behandeln?
- Bei der isolierten Kugel bleibt die Gesamtladung der Kugel beim Einbringen der Punktladung unverändert. Z.B. vorher Null → nachher Null.
- Die Bildladung $Q^* = -\lambda(\vec{r}')Q$ verändert aber die Ladung im Volumen V_2
- Für eine (zusätzliche) Ladung im Zentrum der Kugel ist die Kugeloberfläche eine **Äquipotentialfläche** → Potentialänderung nur um Konstante
- Größe der Ladung: $-Q^*$
- Problemangepasste Greensche Funktion:

$$\begin{aligned}G^*(\vec{r}, \vec{r}') &= G(\vec{r}, \vec{r}') - \lambda(\vec{r}')G(\vec{r}, T(\vec{r}')) + \lambda(\vec{r}')G(\vec{r}, \vec{0}) \\ &= G(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{a}{|\vec{r}'|} \left(G\left(\vec{r}, \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2}\vec{r}'\right) - G(\vec{r}, \vec{0}) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a}{|\vec{r}'|} \left(\frac{1}{\left| \vec{r} - \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2}\vec{r}' \right|} - \frac{1}{|\vec{r}|} \right) \right]\end{aligned}$$

Isolierte Kugel – Potential auf der Oberfläche

- Problemangepasste Greensche Funktion:

$$\begin{aligned} G^*(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a}{|\vec{r}'|} \left(\frac{1}{\left| \vec{r} - \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2} \vec{r}' \right|} - \frac{1}{|\vec{r}'|} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a}{|\vec{r}'|} \frac{1}{\left| \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2} \vec{r} - \vec{r}' \right|} + \frac{a}{|\vec{r}'|} \frac{1}{|\vec{r}'|} \right] \end{aligned}$$

- Auf der Oberfläche der Kugel kompensieren sich (nach Konstruktion) die ersten beiden Beiträge:

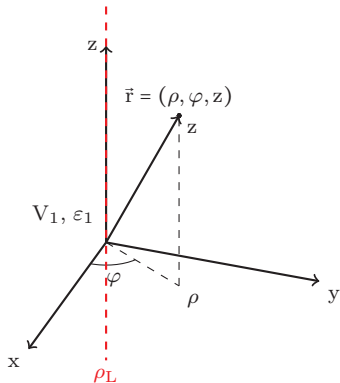
$$G^*(\vec{r}, \vec{r}') \Big|_{|\vec{r}|=a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{|\vec{r}'|} = G(0, \vec{r}') \text{ konstant auf } O(V_2)$$

- Potential auf der Oberfläche

$$\phi(\vec{r}) \Big|_{|\vec{r}|=a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{Q}{|\vec{r}'|} \quad \rightarrow \text{Potential im Ursprung ohne Kugel}$$

Spiegelung einer Linienladung am Zylinder

- Problem: Linienladung vor geerdetem und ideal leitfähigem Zylinder. Beide z-gerichtet.
- Zunächst benötigt: **Greensche Funktion des Freiraums**



- Für das Skalarpotential gilt:

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_1} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_B}\right)$$

- Bezugsabstand ρ_B : $\phi(\vec{r} = (\rho_B, \varphi, z)) = 0$
- ϕ nur von ρ abhängig. \rightarrow Betrachtung in Ebene $z = 0$ ausreichend $\rightarrow \vec{r} \cdot \vec{e}_z = 0$
- Damit: $\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_1} \ln\left(\frac{|\vec{r}|}{\rho_B}\right)$
- Linienladung durch \vec{r}' (auch in Ebene $z = 0$):

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_1} \ln\left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{\rho_B}\right)$$

2D Greensche Funktion im 3D Raum (z-unabhängiges Potential)

- Potential

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_1} \ln\left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{\rho_B}\right) \text{ mit } \vec{r}' \cdot \vec{e}_z = 0$$

- Aus dieser Lösung ergibt sich sofort die **Greensche Funktion des 2D-Freiraums** G_2 (eingebettet in den 3D-Raum). Dies ist die 3D-Greensche Funktion für Probleme, die unabhängig von einer Koordinatenrichtung (hier: z) sind:

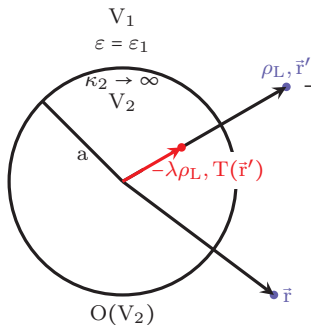
$$G_2(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{2\pi\epsilon_1} \ln\left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{\rho_B}\right)$$

- Analogie: Punktladung vor Kugel \leftrightarrow Linienladung vor Zylinder

Linienladung von Zylinder: Transformation

- Versuche wieder die **Kelvin-Transformation**:

$$T(\vec{r}') = \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2} \vec{r}' = \frac{a^2}{(\rho')^2} \vec{r}'$$



- Für das Potential gilt dann (λ noch unbekannt)

$$\phi(a\vec{e}_\rho) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_1} \rho_L \left[\ln\left(\frac{\rho - a}{\rho_B}\right) - \lambda \ln\left(\frac{a - T(a\vec{e}_\rho)}{\rho_B}\right) \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\ln(\rho - a) - \lambda \ln(a - T(a\vec{e}_\rho)) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\ln(\rho - a) - \lambda \ln\left(a - \frac{a^2}{\rho^2} \rho\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rho - a \stackrel{!}{=} \left(a - \frac{a^2}{\rho}\right)^\lambda$$

- Es gibt kein λ , das $\phi = 0$ auf der Oberfläche erzeugt.

Linienladung vor Zylinder: $\lambda(\vec{r}) = 1$

- Es gibt kein λ , das zusammen mit der Kelvin-Transformation das gewünschte Potential auf der Oberfläche des Zylinders erzeugt.
- Trotzdem den Weg weiter beschreiten: setze $\lambda(\vec{r}) = 1$
- Wir hatten bereits:

$$|\mathbf{T}(\vec{r}) - \vec{r}'| = \frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|} |\vec{r} - \mathbf{T}(\vec{r}')|$$

- Damit:

$$\begin{aligned} G_2(\vec{r}, \mathbf{T}(\vec{r}')) &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_1} \ln\left(\frac{|\vec{r} - \mathbf{T}(\vec{r}')|}{\rho_B}\right) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_1} \ln\left(\frac{|\mathbf{T}(\vec{r}) - \vec{r}'| |\vec{r}|}{\rho_B |\vec{r}'|}\right) \\ &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_1} \left[\ln\left(\frac{|\mathbf{T}(\vec{r}) - \vec{r}'|}{\rho_B}\right) + \ln\left(\frac{|\vec{r}|}{\rho_B}\right) - \ln\left(\frac{|\vec{r}'|}{\rho_B}\right) \right] \\ &= G_2(\mathbf{T}(\vec{r}), \vec{r}') + G_2(\vec{r}, \vec{0}) - G_2(0, \vec{r}') \end{aligned}$$

- Damit ist das Potential

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \rho_L G_2(\vec{r}, \vec{r}') - \rho_L G_2(\vec{r}, \mathbf{T}(\vec{r}')) \\ &= \rho_L [G_2(\vec{r}, \vec{r}') - G_2(\mathbf{T}(\vec{r}), \vec{r}') - G_2(\vec{r}, \vec{0}) + G_2(0, \vec{r}')] \end{aligned}$$

Linienladung vor Zylinder: ϕ auf der Oberfläche

- Wir hatten das Potential berechnet:

$$\phi(\vec{r}) = \rho_L [G_2(\vec{r}, \vec{r}') - G_2(T(\vec{r}), \vec{r}') - G_2(\vec{r}, \vec{0}) + G_2(0, \vec{r}')]]$$

- Wegen $T(\vec{r}) = \vec{r}$ für $\vec{r} = a\vec{e}_\rho$ kompensieren sich die ersten beiden Terme auf der Oberfläche:

$$\phi(\vec{r})|_{\vec{r}=a\vec{e}_\rho} = \rho_L [-G_2(a\vec{e}_\rho, \vec{0}) + G_2(0, \vec{r}')] = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_1} \ln\left(\frac{a}{|\vec{r}'|}\right)$$

- Vergleich mit Potential einer Linienladung auf der z -Achse:

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_1} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_B}\right) \rightarrow \phi(\vec{r})|_{\vec{r}=a\vec{e}_\rho} = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_1} \ln\left(\frac{a}{\rho_B}\right)$$

- Offenbar lässt sich $\phi = 0$ auf der Zylinderoberfläche durch eine zusätzliche Linienladung auf der z -Achse erreichen. Mit diesem Zusatz funktioniert hier also die Kelvin-Transformation mit $\lambda = 1$. → **Problemangepasste Greensche-Funktion gefunden:**

$$G^*(\vec{r}, \vec{r}') = G_2(\vec{r}, \vec{r}') - G_2\left(\vec{r}, \frac{a^2}{(\rho')^2} \vec{r}'\right) + G_2(\vec{r}, \vec{0})|_{\rho_B=|\vec{r}'|}$$

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Spiegelungsmethode – Dielektrische Spiegelung

Theoretische Elektrotechnik – Vertiefung

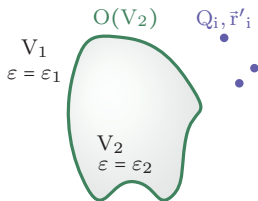
Lizenz: CC BY 3.0 DE



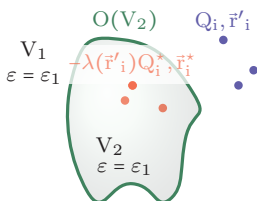
Problemstellung und Idee

- Volumen V_2, ϵ_2 eingebettet in Volumen V_1, ϵ_1
- Ladungen (Q_i, \vec{r}'_i) in V_1 vorgegeben.
- Gesucht ist die Lösung in V_1 und V_2
- Lösungsidee:
 - Für die Berechnung im eingebetteten Volumen $V_1 \rightarrow$ Bildladungen (Q_i^*, \vec{r}_i^*) in V_2 als Ersatz für das eingebettete Material $\rightarrow V_2$ mit $\epsilon = \epsilon_1$
 - Für die Berechnung im eingebetteten Volumen $V_2 \rightarrow$ Bildladungen (Q_i^{**}, \vec{r}_i^{**}) in V_1 als Ersatz für das externe Material $\rightarrow V_1$ mit $\epsilon = \epsilon_2$
 - Versuch: $\vec{r}_i^{**} = \vec{r}'_i \rightarrow$ Faktisch „nur“ Veränderung der ursprünglichen Ladungen; keine externen Ladungen an neuen Positionen.

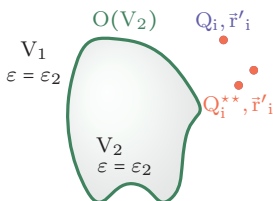
reales Problem:



Berechnung in V_1 :



Berechnung in V_2 :



Stetigkeitsbedingungen am Übergang

- TET-Verhalten_an_Grenzflaechen.pdf, https://youtu.be/_SulhVuUA-Y
- Normalenvektor \vec{n} von Medium 1 nach Medium 2 orientiert
- $\vec{a} = a_n \vec{n} + a_t \frac{(\vec{n} \times \vec{a}) \times \vec{n}}{|\vec{n} \times \vec{a}|} = (\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\vec{n} \times \vec{a}) \times \vec{n}$
- Induktionsgesetz \rightarrow Tangentialkomponente der Elektrischen Feldstärke beim Übergang **immer stetig**:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = (E_2 \cdot \vec{n} - E_1 \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

- Für das Skalarpotential folgt dann mit $\vec{E} = -\text{grad } \phi$

$$\vec{n} \times (\text{grad } \phi_1 - \text{grad } \phi_2) = \vec{0} \Rightarrow \text{grad } \phi_1 - \text{grad } \phi_2 = (\vec{n} \cdot \text{grad } \phi_1 - \vec{n} \cdot \text{grad } \phi_2) \vec{n}$$

- Die Normalkomponente der Dielektrischen Verschiebung **kann unstetig sein**:
 $\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_f$
- Hierzu muss es freie Ladungsträger geben. Für **ideale Dielektrika** gilt

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot (\varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_1 \vec{E}_1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{n} \cdot (-\varepsilon_2 \text{grad } \phi_2 + \varepsilon_1 \text{grad } \phi_1) = 0$$

- Ohne „innere Quellen“ (z.B. Dipolschicht):

Potential zweimal stetig diff.-bar; insbesondere $\phi_2 - \phi_1 = 0$

Potentiale in V_1 und V_2

- Greensche-Funktionen des Freiraums in V_1 und V_2 :

$$G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{bzw.} \quad G_{\varepsilon_2}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad G_{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} G_{\varepsilon_2}$$

- Berechnung in V_1 (erstes Ersatzproblem):

$$\begin{aligned} \phi_1(\vec{r}) &= QG_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - \lambda(\vec{r}')Q^*G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, T(\vec{r}')) \\ &= QG_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - \lambda(\vec{r})Q^*G_{\varepsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}') \end{aligned}$$

- Berechnung in V_2 (zweites Ersatzproblem):

$$\begin{aligned} \phi_2(\vec{r}) &= QG_{\varepsilon_2}(\vec{r}, \vec{r}') + Q^{**}G_{\varepsilon_2}(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= (Q + Q^{**})G_{\varepsilon_2}(\vec{r}, \vec{r}') \end{aligned}$$

- Wie bei „isolierte Kugel“: Gesamtladung erhalten: $-\lambda(\vec{r}')Q^* + Q^{**} = 0$
- Ziel: Bestimme Q^* , λ und $\vec{r}^* = T(\vec{r}')$ so, dass die Stetigkeitsbedingungen auf $O(V_2)$ erfüllt werden.

Stetigkeitsbedingungen

- Stetigkeit des Skalarpotentials für $\vec{r} \in O(V_2)$:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} (\phi_1 - \phi_2) = QG_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - \underbrace{\lambda(\vec{r})Q^*}_{=1} G_{\varepsilon_1}(\underbrace{T(\vec{r})}_{=\vec{r}}, \vec{r}') - (Q + Q^{**}) G_{\varepsilon_2}(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= \left((Q - Q^*) - (Q + Q^{**}) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') \\ 0 &= \frac{Q - Q^*}{\varepsilon_1} - \frac{Q + Q^{**}}{\varepsilon_2} \Rightarrow \boxed{\frac{Q - Q^*}{\varepsilon_1} = \frac{Q + Q^{**}}{\varepsilon_2}} \end{aligned}$$

- Tangentialkomponente des Feldes für $\vec{r} \in O(V_2)$: $\vec{n} \times (\text{grad } \phi_1 - \text{grad } \phi_2) = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{0} &\stackrel{!}{=} \vec{n} \times \text{grad } \phi_1 - \vec{n} \times \text{grad } \phi_2 \\ &= \vec{n} \times \text{grad} \left[QG_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - \lambda(\vec{r})Q^* G_{\varepsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}') \right] - \vec{n} \times \text{grad} \left[(Q + Q^{**}) G_{\varepsilon_2}(\vec{r}, \vec{r}') \right] \\ &= \vec{n} \times \text{grad} \left[QG_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - \lambda(\vec{r})Q^* G_{\varepsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}') \right] - \vec{n} \times \text{grad} \left[(Q + Q^{**}) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') \right] \end{aligned}$$

Stetigkeitsbedingungen (fortgeführt)

$$\vec{0} = \vec{n} \times \text{grad} \left[QG_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - \lambda(\vec{r})Q^*G_{\varepsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}') \right] - \vec{n} \times \text{grad} \left[(Q + Q^{**}) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') \right]$$

- Auf λ und T wird der Gradient angewendet. Es kann nicht einfach $\lambda(\vec{r}) = 1$ und $T(\vec{r}) = \vec{r}$ für $\vec{r} \in O(V_2)$ verwendet werden.
- Weiterrechnen:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= Q \vec{n} \times \text{grad} G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - Q^* \vec{n} \times \text{grad} (\lambda(\vec{r})G_{\varepsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}')) \\ &\quad - (Q + Q^{**}) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \vec{n} \times \text{grad} G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= \left(Q - (Q + Q^{**}) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \vec{n} \times \text{grad} G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - Q^* \vec{n} \times \text{grad} (\lambda(\vec{r})G_{\varepsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}')) \\ &= \left(Q - (Q + Q^{**}) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \vec{n} \times \text{grad} G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') \\ &\quad - Q^* G_{\varepsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}') \vec{n} \times \text{grad} \lambda(\vec{r}) - Q^* \lambda(\vec{r}) \vec{n} \times \text{grad} G_{\varepsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}') \\ &= \left(Q - (Q + Q^{**}) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \vec{n} \times \text{grad} G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') \\ &\quad - Q^* G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') \vec{n} \times \text{grad} \lambda(\vec{r}) - Q^* \vec{n} \times \text{grad} G_{\varepsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}')\end{aligned}$$

Stetigkeitsbedingungen (fortgeführt)

$$\vec{0} = \left(Q - (Q + Q^{**}) \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \vec{n} \times \text{grad } G_{\epsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - Q^* G_{\epsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') \vec{n} \times \text{grad } \lambda(\vec{r}) - Q^* \vec{n} \times \text{grad } G_{\epsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}')$$

- T stetig diff.-bar und $T(T(\vec{r})) = \vec{r}$: $\text{grad}_{\vec{r}} G_{\epsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}') = \text{grad}_{T(\vec{r})} G_{\epsilon_1}(T(\vec{r}), \vec{r}')$
- Damit lässt sich der Ausdruck weiter zusammenfassen:

$$\vec{0} = \underbrace{\left((Q - Q^*) - (Q + Q^{**}) \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)}_{=0} \vec{n} \times \text{grad } G_{\epsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - Q^* G_{\epsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') \vec{n} \times \text{grad } \lambda(\vec{r})$$

- Somit gilt für $\vec{r} \in O(V_2)$:

$$\vec{n} \times \text{grad } \lambda(\vec{r}) = \vec{0}$$

- Führt man gleichen Operationen mit der Stetigkeitsbedingung für die Normalkomponente durch, so gilt für $\vec{r} \in O(V_2)$ auch:

$$\vec{n} \cdot \text{grad } \lambda(\vec{r}) = 0$$

- Insgesamt gilt also für $\vec{r} \in O(V_2)$:

$$\text{grad } \lambda(\vec{r}) = \vec{0}$$

Zusammenfassung

- Aus der Konstanz der Gesamtladung:

$$-\lambda(\vec{r}')Q^* + Q^{**} = 0$$

- Aus der Stetigkeit des Potentials für $\vec{r} \in O(V_2)$:

$$\frac{Q - Q^*}{\varepsilon_1} = \frac{Q + Q^{**}}{\varepsilon_2}$$

- Aus Normal- und Tangentialkomponente des Feldes für $\vec{r} \in O(V_2)$:

$$\text{grad } \lambda(\vec{r}) = \vec{0}$$

- Keine allgemeine Lösung. Aber $\lambda(\vec{r}) = 1$ (Ebene, Zylinder) erfüllt die letzte Beziehung.
- Mit $\lambda(\vec{r}) = 1$:

$$Q^* = Q^{**} \text{ und } \frac{Q - Q^*}{\varepsilon_1} = \frac{Q + Q^*}{\varepsilon_2} \Rightarrow Q^* = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} Q$$

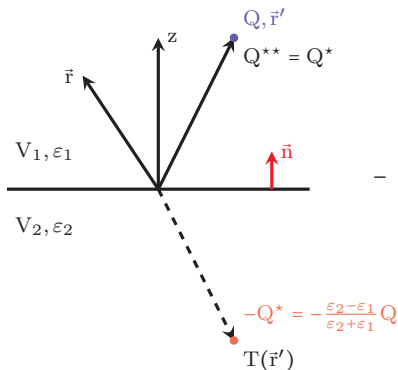
Dielektrische Spiegelung an der Ebene

- In V_1 :

$$\begin{aligned}\phi_1(\vec{r}) &= QG_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - Q^*G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, T(\vec{r}')) \\ &= Q \left(G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} G_{\varepsilon_1}(\vec{r}, T(\vec{r}')) \right) \\ &= Q \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \left(G(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} G(\vec{r}, T(\vec{r}')) \right)\end{aligned}$$

- In V_2 :

$$\begin{aligned}\phi_2(\vec{r}) &= QG_{\varepsilon_2}(\vec{r}, \vec{r}') + Q^{**}G_{\varepsilon_2}(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= Q \left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right) G_{\varepsilon_2}(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= Q \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right) G(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= Q \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right) G(\vec{r}, \vec{r}')\end{aligned}$$



- Dieses Handout steht unter der Lizenz CC BY 3.0 DE.
Details hierzu finden Sie unter
<https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.de>.
- Diese Datei wurde erstellt am: 2023-08-03 15:22:51+02:00
Die jeweils neueste Version finden Sie hier im Ordner „Theoretische Elektrotechnik“: <https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/27455913992/CourseNode/103138906469436>
- Wenn Sie einen Fehler entdecken, freue ich mich über einen kurzen Hinweis an <mailto:tetemv@tu-dresden.de>!
- Das Video zu dieser Lerneinheit (und zu weiteren) finden Sie entweder auf dem Videocampus Sachsen (<https://videocampus.sachsen.de/album/view/aid/287>) oder auf YouTube (<https://www.youtube.com/channel/UCDWSIsdJSggNXdYc9d1k65Q>).