

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Theoretische Elektrotechnik

Handout zum Modul ET-12 02 01 im
Diplomstudiengang Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

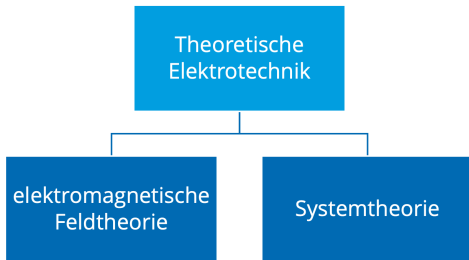
Begriffsbestimmung

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Was ist Theoretische Elektrotechnik?

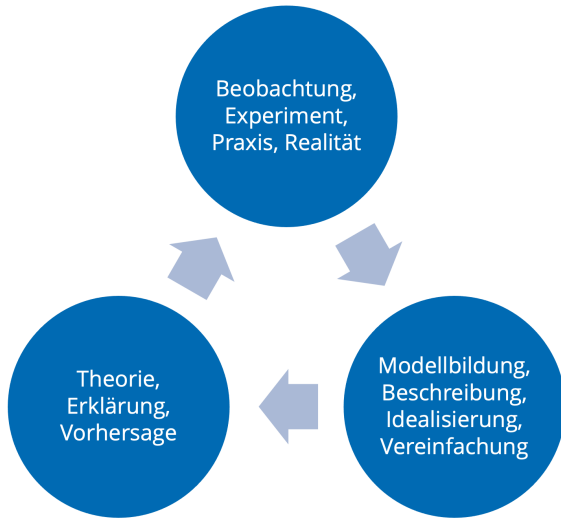


- Die **Theoretische Elektrotechnik** beinhaltet die **elektromagnetische Feldtheorie** und die **Systemtheorie**
- TET beschäftigt sich mit den theoretischen Grundlagen der Elektrotechnik; Anwendungen folgen hieraus
- TUD: Systemtheorie ist eigenes Modul im Studiengang Elektrotechnik → kann hier ausgeklammert werden
- Elektromagnetische Feldtheorie baut auf den **Maxwellischen Gleichungen** auf

Theoretische Grundlagen – Was ist eine Theorie?

- In der Wissenschaft ist Theorie ist nicht das Gegenteil von Praxis!
- Allgemeiner Sprachgebrauch:
 - Theorie = unbewiesene These
- Wissenschaft:
 - Theorie = **System wissenschaftlich begründeter Aussagen**, das dazu dient, **Ausschnitte der Realität** und die **zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten** zu **erklären** und **Prognosen abzuleiten**
 - Abgrenzung zum Modell: **Modelle** dienen häufig der **Beschreibung bekannter Sachverhalte**. Hierzu **vereinfachen** Sie das reale Problem oft (z.B. Planetenmodell des Atoms, homogenes Medium) oder gehen von **idealisierten** Annahmen aus (z.B. ideales Gas, Massenpunkt).
 - **Modelle liefern keine Erklärungen**, unterstützen aber oft den Prozess der Theoriebildung und helfen bei der Veranschaulichung
 - Erst die Beherrschung einer Theorie ermöglicht die Entwicklung bzw. die Weiterentwicklung von Modellen für neue Problemstellungen. Gleiches gilt für (neue) numerische Berechnungsverfahren.

Erkenntnisprozess



Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Vorwissen

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Ausgangspunkt

Maxwell-Gleichungen

Ausgangspunkt aller Betrachtungen sind die **Maxwell-Gleichungen**:

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V$$

Offenbar ist Wissen in folgenden Bereichen notwendig:

- Felder (skalar und vektorwertig; reell und komplexwertig)
- Differentialoperatoren auf diesen Feldern
- partielle Differentialgleichungen
- beim Übergang von lokalen zu integralen Aussagen: Integralrechnung (Linien-, Flächen-, Volumenintegrale; in verschiedenen Koordinatensystemen (insb. kartesische, zylindrische und sphärische Koordinaten, Umrechnung dazwischen, Metrik, Integralsätze (Gauß und Stokes), Kronecker δ_{ij} , Delta-Funktion δ)

Differentialoperatoren (I)

Divergenz

Divergenz eines Vektorfeldes, „Quellendichte“ \rightarrow Skalarfeld

$$\operatorname{div} \vec{F} := \nabla \cdot \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} F_i = \partial_i F_i \quad \text{in kartesischen Koordinaten}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} := \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \oint_{\partial(V)} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \right) \quad \text{koordinatenfrei}$$

Differentialoperatoren (II)

Rotation

Rotation eines Vektorfeldes, „Wirbelstärke“ \rightarrow Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \vec{F} := \nabla \times \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j F_k \quad \text{in kartesischen Koordinaten}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} := \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \oint_{O(V)} \vec{n} \times \vec{F} dS \right) \quad \text{koordinatenfrei}$$

Videos von Grant Sanderson (3blue1brown)

- Kanal https://www.youtube.com/channel/UCYO_jab_esuFRV4b17AJtAw
- Video zu Divergenz und Rotation: <https://youtu.be/rB83DpBJQsE>
- Animation Package: manim <https://pypi.org/project/manimlib>

Differentialoperatoren (III)

Gradient

Gradient eines Skalarfeldes, „Richtungsfeld des stärksten Anstiegs“ \rightarrow Vektorfeld

$$\text{grad } f := \nabla f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} f \vec{e}_i = \vec{e}_i \partial_i f \quad \text{in kartesischen Koordinaten}$$

$$\text{grad } f := \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \oint_{O(V)} f \vec{n} dS \right) \quad \text{koordinatenfrei}$$

Videos und Übungen auf Khan Academy

- Khan Academy <https://www.khanacademy.org>
- Video zum Gradienten: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivative>, dann zu Gradient...

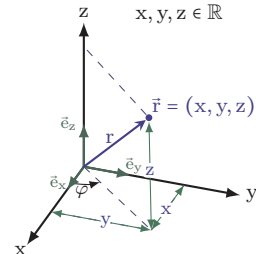
Koordinatensysteme

- Natürlich insbesondere **kartesisch**, **zylindrisch**, **sphärisch** (2D und 3D)
- Umrechnung von Komponenten
- Jacobi Matrix
- Umrechnung von Differentialen und Integralen
 - Partielle Ableitung, div, rot, grad
 - Volumenelemente, Flächenelemente, Linienelemente
- Metrik (metrischer Tensor)

Koordinatensysteme

Kartesisches Koordinaten

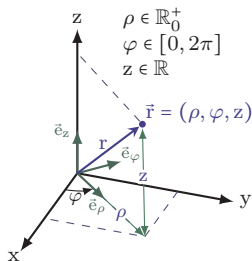
$$x, y, z \in \mathbb{R}$$



$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$: konstante Vektoren

Zylinder Koordinaten

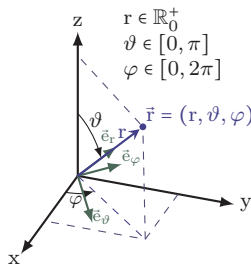
$$\begin{aligned} \rho &\in \mathbb{R}_0^+ \\ \varphi &\in [0, 2\pi] \\ z &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$



$\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\varphi)$, $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi)$
 \vec{e}_z : konstant

Kugel Koordinaten

$$\begin{aligned} r &\in \mathbb{R}_0^+ \\ \vartheta &\in [0, \pi] \\ \varphi &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\vartheta, \varphi)$,
 $\vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)$, $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi)$

Kartesisch – Zylinder

Kartesisch – Kugel

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\vartheta \\ \vec{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

Integralsätze

Satz von Gauss

Das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes \vec{F} über eine geschlossene Fläche $O(V)$ ist gleich dem Volumenintegral der Divergenz von \vec{F} , erstreckt über das von der Fläche $O(V)$ eingeschlossene Volumen V :

$$\oint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \oint_{O(V)} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Das geht natürlich auch in 2D: Volumen \rightarrow Fläche; Oberflächenintegral \rightarrow geschlossenes Wegintegral

Satz von Stokes

Das Kurven- oder Linienintegral eines Vektorfeldes \vec{F} längs einer einfach geschlossenen Kurve $C(A)$ ist gleich dem Oberflächenintegral der Rotation von \vec{F} über eine beliebige Fläche A , die durch die Kurve C berandet wird:

$$\oint_{C(A)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

δ -Funktion (I)

Motivation

Die Berechnung von Differentialen in der Nähe von Singularitäten des Feldes ist häufig problematisch. Beispiel Coulomb Feld einer Punktladung Q im Ursprung:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

Die Divergenz (Quellstärke) sollte nur am Ursprung ungleich Null sein und am Ursprung einen definierten Wert haben.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} \vec{e}_r \right) &= \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (1) ??? \end{aligned}$$

δ -Funktion (II)

Definition über ihre Eigenschaften

Es soll gelten

$$\delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0 \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Solche Funktionen existieren nur im Grenzwert von $n \rightarrow \infty$ von Funktionen $f_n(x)$ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = 1$ und $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $x \neq 0$ und $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

Beispiele

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_n(x) = n e^{-\pi n^2 x^2}$$

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi} \left(\frac{\sin nx}{nx} \right)^2$$

δ -Funktion (III)

Wichtige Beziehungen

Da die δ -Funktion für alle $x \neq 0$ verschwindet und aufgrund der Normierung folgt unmittelbar:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = f(0)$$

Dies kann einfach für eine Verschiebung $x \rightarrow x - a$ verallgemeinert werden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - a)dx = f(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a)dx = f(a)$$

Wichtig ist auch die Skalierungseigenschaft (z.B. auch für dimensionsbehaftete Größen; $k = \text{Einheit von } x$):

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x)$$

Verallgemeinerung auf 3D:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \rightarrow \delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{r})dV = 1$$

δ -Funktion (IV)

Mit dem Gaußschen Integralsatz und der δ -Funktion lässt sich $\operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} \vec{e}_r \right)$ leicht bestimmen:

$$\begin{aligned} \int_{K(R)} \operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} \vec{e}_r \right) dV &= \oint_{O(K)} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{A} \quad r = R, \quad d\vec{A} = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \vec{e}_r \\ &= 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{R^2} R^2 \sin \vartheta d\vartheta \\ &= 4\pi \\ \operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} \vec{e}_r \right) &= 4\pi \delta^3(\vec{r}) \end{aligned}$$

Einfach berechnen lässt sich:

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = \vec{e}_r \partial_r \frac{1}{r} + \vec{0} + \vec{0} = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

Hiermit folgt die wichtige Beziehung für den **Laplace-Operator** $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$:

$$\Delta \frac{1}{r} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -4\pi \delta^3(\vec{r})$$

Zerlegung von Vektorfeldern (I)

Helmholtz-Theorem

Ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$, welches für $r \rightarrow \infty$ stärker als $1/r$ gegen Null abfällt (das ist für praktisch relevante Probleme regelmäßig erfüllt), lässt sich als Summe eines rotationsfreien Anteils $\vec{a}(\vec{r})$ und eines divergenzfreien Anteils $\vec{b}(\vec{r})$ darstellen:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r}) + \vec{b}(\vec{r}) \text{ mit } \text{rot } \vec{a} = \vec{0} \wedge \text{div } \vec{b} = 0$$

Gradientenfelder sind rotationsfrei: $\text{rot grad } \phi = \vec{0}$

Rotationsfelder sind divergenzfrei: $\text{div rot } \vec{A} = 0$

Hiermit folgt die Darstellung mit einem **Skalarpotential** ϕ und einem **Vektorpotential** \vec{A} :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r}) + \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \text{ („-“ ist Konvention)}$$

Zerlegung von Vektorfeldern (II)

Skalar- und Vektorpotential

Skalar- $\phi(\vec{r})$ und **Vektorpotential** $\vec{A}(\vec{r})$ lassen sich direkt aus dem Feld $\vec{F}(\vec{r})$ berechnen. Es gilt:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{div}' \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' - \frac{1}{4\pi} \oint_{O(V)} \vec{n}' \cdot \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2r'$$
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{rot}' \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' - \frac{1}{4\pi} \oint_{O(V)} \vec{n}' \times \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2r'$$

Longitudinale und transversale Komponente

Häufig bezeichnet man die rotationsfreie Komponente $-\operatorname{grad} \phi(\vec{r})$ als **longitudinale Komponente** und die divergenzfreie Komponente $\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})$ als **transversale Komponente** des Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$.

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Axiomatische Grundlagen

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Maxwellsche Gleichungen

$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$	$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$	vektorielle pDGL, zeitabhängig → dynamisch
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V$	skalare pDGL, zeitunabhängig → statisch
homogene pDGL	inhomogene pDGL	

- Historisch wurden die Gleichungen **unabhängig voneinander** aus **Beobachtungen** gewonnen (**Colomb-Gaußsches-Gesetz**, **Faradaysches Induktionsgesetz**, erweitertes **Ampèresches Durchflutungsgesetz**, Erhaltung des magnetischen Flusses)
- Einführung des Verschiebungsstroms und Zusammenführung durch **James Clerk Maxwell (1831-1879)**: Maxwell, James Clerk, and Royal Society (Great Britain). A dynamical theory of the electromagnetic field. The Royal Society, 1865, doi: <https://doi.org/10.5479/si1.423156.39088007130693>
- Heutige Formulierung durch Oliver Heaviside (1850-1925) nach Einführung der Vektoranalysis (div, rot)
- Aber: Wo kommen die Gleichungen her? Was ist das tiefere Fundament? Gibt es eine axiomatische Basis?

Literatur

- Die hier dargestellte Vorgehensweise ist entnommen aus:

Gronwald F., Hehl F.W., Nitsch J.: „Axiomatics of classical electrodynamics and its relation to gauge field theory“, Physics Notes 14, edited by C. Baum, 2005, <http://ece-research.unm.edu/summa/notes/Physics/0014.pdf> (heruntergeladen am 19. November 2020)

Ladungsdichte und Ladung

- Ladung erscheint im Colomb-Gauß-Gesetz in Form der Volumenladungsdichte ρ_V
- Ladung ist dann nach Definition das Volumenintegral über die Ladungsdichte; ρ_V ist somit Integrand eines Volumenintegrals:

$$Q = \iiint_V \rho_V dV$$

- ρ_V ist somit Integrand eines Volumenintegrals
- Mit Poincaré-Lemma(3) folgt unmittelbar das Coulomb-Gauß-Gesetz: $\text{div } \vec{D} = \rho_V$
- Ladungen bewegen sich mit (Material)-Geschwindigkeit $\vec{u} \rightarrow$ Stromdichte \vec{J}

$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho_V(\vec{r})\vec{u}(\vec{r})$$

- Strom I durch 2D-Fläche S:

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Poincaré-Lemma

- Das Poincaré-Lemma sagt uns, unter welchen **Bedingungen** eine Größe als **Ableitung einer anderen Größe** dargestellt (Potential; nicht Eindeutig \rightarrow führt auf den Begriff der Eichung) werden kann.
- Im Spezialfall 3D-Raum

1. Auf einfach zusammenhängenden Gebiet wirbelfreies Vektorfeld = Gradient eines Potentialfeldes

$$\operatorname{rot} \vec{\alpha} = \vec{0} \rightarrow \vec{\alpha} = \operatorname{grad} f$$

2. auf konvexem Gebiet quellenfreies Vektorfeld = Rotation eines Vektorpotentials

$$\operatorname{div} \vec{\beta} = 0 \rightarrow \vec{\beta} = \operatorname{rot} \vec{\alpha}$$

3. Skalare Felddichte = Divergenz eines Vektorfeldes

$$\gamma \text{ ist ein Volumen Integrand} \rightarrow \gamma = \operatorname{div} \vec{\beta}$$

Ladungsdichte und Ladung (fortgesetzt)

- Ladung erscheint im Coulomb-Gauß-Gesetz in Form der Volumenladungsdichte ρ_V
- Ladung ist dann nach Definition das Volumenintegral über die Ladungsdichte; ρ_V ist somit Integrand eines Volumenintegrals:

$$Q = \iiint_V \rho_V dV$$

- ρ_V ist somit Integrand eines Volumenintegrals
- Mit Poincaré-Lemma(3) folgt unmittelbar das Coulomb-Gauß-Gesetz: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V$
- Ladungen bewegen sich mit (Material)-Geschwindigkeit $\vec{u} \rightarrow$ Stromdichte \vec{J}

$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho_V(\vec{r})\vec{u}(\vec{r})$$

- Strom I durch 2D-Fläche S :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Axiom 1: Ladungserhaltung

- Wir postulieren Ladungserhaltung: Wenn sich Ladung in einem Volumen ändert, dann geschieht dies nur durch Ladungsstrom durch die Oberfläche des Volumens
- Wir betrachten die materielle Ableitung (Beobachter bewegt sich mit) $\frac{D}{Dt}$ und nutzen das Reynolds-Transport-Theorem (*):

$$\begin{aligned}\frac{DQ}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left[\int_{V(t)} \rho_V dV \right] \stackrel{!}{=} 0 \\ &\stackrel{*}{=} \int_{V(t)} \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV + \oint_{O(V)(t)} \rho_V \vec{u} \cdot d\vec{A} \quad \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} + \iint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \text{div}(\rho_V \vec{u}) \right) dV \\ &= \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \text{div} \vec{J} \right) dV \quad \rightarrow \frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0 \\ &= \int_{V(t)} \text{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) dV\end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung

- Damit dies für beliebige (zeitlich veränderliche) Volumina gelten kann, folgt:

$$\text{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) = 0$$

Axiom 1: Ladungserhaltung (...)

– Aus Poincaré (2):

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} = \operatorname{rot} \vec{H}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$$

Zwischenfazit

- Definition der Ladungsdichte und Poincaré (3) folgt sofort eine Gleichung in der Form des Coulomb-Gauß-Gesetzes (... es gibt ein Vektorfeld \vec{D} , so dass...):

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V$$

- Mit dem Axiom der Ladungserhaltung und Poincaré (2) und der obigen Beziehung folgt (... es gibt ein Vektorfeld \vec{H} , so dass...):

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$$

- Elektrische Anregung (historisch: dielektrische Verschiebung): \vec{D}
- Magnetische Anregung (historisch: Magnetfeld): \vec{H}
- Bisher keinen Rückgriff auf Kräfte gemacht
- Ladungserhaltung gilt auch mikrophysikalisch → die inhomogenen Maxwellgleichungen gelten auch mikrophysikalisch → elektrische und magnetische Anregung sind mikrophysikalische Größen
- Ladung ist auch relativistisch invariant → inhomogene Maxwell-Gleichungen können auch relativistisch invariant formuliert werden

Axiom 2: Lorenzkraft

- Die experimentell hervorragend bestätigt **Lorenzkraft** wird als axiomatisch angenommen:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

- Hierbei wird die **elektrische Feldstärke** eingeführt
- **Relativitätsprinzip**: Physikalische Gesetze sind unabhängig vom Inertialsystem
 - Betrachte zwei Inertialsysteme: Laborsystem (Größen ohne ´) bewegt sich mit v relativ zum Ruhesystem der Ladung q (Größen mit ´)
 - Annahme: keine elektrische Feldstärke im Ruhesystem; es gilt offensichtlich

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}') = \vec{0}$$

- Dann muss diese Kraft auch im Laborsystem verschwinden:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \vec{0} \rightarrow \vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$$

- Die beiden Feldstärken \vec{E} und \vec{B} (hist: magnetische Induktion) sind **nicht unabhängig** voneinander!

Axiom 3: Erhaltung des magnetischen Flusses

- Magnetischer Fluss durch Fläche: $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$
- Flusserhaltung analog zur Ladungserhaltung: $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oiint_{O(S)} \vec{J}^\Phi \cdot d\vec{s} = 0$
- Stokes-Theorem: $\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \iint_S \text{rot } \vec{J}^\Phi \cdot d\vec{A} = 0 \rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot } \vec{J}^\Phi = \vec{0}$
- Bildet man die Divergenz folgt (wegen $\text{div rot } \dots = 0$):

$$\text{div } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{B} = \rho_{\text{mag}}, \frac{\partial \rho_{\text{mag}}}{\partial t} = 0$$

- Die magnetische Ladungsträgerdichte ρ_{mag} ist auf jeden Fall zeitlich invariant!

Axiom 3: Erhaltung des magnetischen Flusses (...)

– Relativitätsprinzip:

- Sei in einem System $\frac{\partial \rho_{\text{mag}}(\vec{r})}{\partial t} = 0$, dann gibt es an jedem Ort einen zeitlich konstanten Wert
- Für einen Beobachter in einem anderen Initialsystem würde sich die räumliche Verteilung aber zeitlich ändern.
- Dieser Widerspruch tritt nur dann nicht auf, wenn die magnetische Ladungsdichte eine räumliche Konstante ist. (für alle Orte und alle Zeiten gleich)
- Logische Konsequenz:

$$\rho_{\text{mag}}(\vec{r}, t) = 0 \rightarrow \boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$$

- Weiterhin noch nicht klar, was \vec{J}^Φ ist (hat die gleiche Dimension wie die elektrische Feldstärke)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot } \vec{J}^\Phi = \vec{0}$$

Aus der Flusserhaltung

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}}$$

MG: Induktion

$$\vec{E} \stackrel{?}{=} \vec{J}^\Phi$$

Ja! Folgt auch aus RP.

Bestandsaufnahme – schon fertig?

- 4 Maxwellgleichungen abgeleitet aus
 - **Mathematik, Relativitätsprinzip, Ladungserhaltung, Lorenzkraft, Erhaltung des magnetischen Flusses**
 - Nebenher: Kontinuitätsgleichung der Ladung, E und B sind nicht voneinander unabhängige Phänomene
- $4 \times 3 = 12$ Feldkomponenten; $3+3+1+1 = 8$ partielle DGLs
- Nur 2 dynamische MG \rightarrow die anderen 2 Gleichungen (div ...) sind immer erfüllt, wenn sie zu einem Zeitpunkt erfüllt sind \rightarrow eher Nebenbedingungen
- Also: **6 dynamische Gleichungen für 12 Komponenten**
- Was noch fehlt sind die sogenannten Materialgleichungen (constitutive relations) \rightarrow 6 weitere Gleichungen, z.B. für das Vakuum:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

Axiom 4: Die Materialgleichungen des Vakuums

- Man kann zeigen, dass die Materialgleichungen des Vakuums genau diese Form haben müssen, wenn
 - Die MGI des Vakuums sind invariant bei Translation und Rotation → eine Eigenschaft des Vakuums
 - Die MGI des Vakuums sind lokal und linear (Felder am gleichen Ort und zur gleichen Zeit werden verknüpft) → eine Eigenschaft des Vakuums
 - Kein Mixen von elektrischen und magnetischen Effekten → eine Eigenschaft des Vakuums
- Dann (und in einer flachen Raumzeit), ergeben sich die Materialgleichungen in der bekannten Form:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

Bemerkenswert

- Die Materialgleichungen (des Vakuums) verknüpfen nicht nur die Anregungen und die Feldstärken.
- Sie verknüpfen auch **elektromagnetische Felder** mit der **Struktur der Raumzeit**. Tatsächlich gibt es Hinweise dafür, dass die Propagation elektromagnetischer Felder, die metrische Struktur der Raumzeit bestimmt (und nicht umgekehrt).
 - Hehl, F.W. and Obukhov, Yu.N.: Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric (Birkhäuser, Boston, 2003)
 - Lämmerzahl, C. and Hehl, F.W.: „Riemannian light cone from vanishing birefringence in premetric vacuum electrodynamics“, Phys.Rev. D, vol.70 (2004) 105022 (7pages); [arXiv.org/gr-qc/0409072](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0409072)

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Einführung

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Ausgangspunkt

Die Maxwell'schen Gleichungen

differentielle Form	→	Satz	→	integrale Form
$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V$	→	Gauss	→	$\oiint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_V dV$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	→	Gauss	→	$\oiint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$	→	Stokes	→	$\oint_{O(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = - \frac{d}{dt} \left[\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \right]$
$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$	→	Stokes	→	$\oint_{O(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \left[\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \right]$

Feldgrößen - Einheiten

- Elektrische Feldstärke \vec{E} mit $[\vec{E}] = \text{V m}^{-1}$
- Magnetische Feldstärke \vec{H} mit $[\vec{H}] = \text{A m}^{-1}$
- Elektrische Flussdichte \vec{D} mit $[\vec{D}] = \text{C m}^{-2} = \text{A s m}^{-2}$
- Magnetische Flussdichte \vec{B} mit $[\vec{B}] = \text{T} = \text{V s m}^{-2}$

Alternative Bezeichnungen

- Elektrisches Feld \vec{E} : -
- Magnetisches Feld \vec{H} : in der Physik heute teilweise auch **magnetische Anregung/Erregung** → Axiomatische Einführung
- Elektrische Flussdichte \vec{D} :
 - in der Physik heute teilweise auch **elektrische Anregung/Erregung** → Axiomatische Einführung
 - alternativ: **dielektrische Verschiebung, Verschiebungsdichte, Verschiebungsflussdichte, D-Feld**
- Magnetische Flussdichte \vec{B} :
 - in der Physik heute teilweise auch **Magnetisches Feld** → Axiomatische Einführung
 - alternativ: **magnetische Induktion, Induktion, Flussdichte, B-Feld**

Andere Größen - Einheiten

- Volumenladungsdichte ρ_V : $[\rho_V] = \text{C m}^{-3}$ (später auch Flächenladungsdichte und Linienladungsdichte)
- Stromdichte \vec{J} mit $[\vec{J}] = \text{A m}^{-2}$
 - Allgemein Summe von drei Beiträgen:

$$\vec{J} = \vec{J}_E + \vec{J}_L + \vec{J}_K$$

- Die eingeprägte Stromdichte \vec{J}_E ist unabhängig vom betrachtetem E-Feld.
- Die Leitungsstromdichte \vec{J}_L mit

$$\vec{J}_L = \kappa \cdot \vec{E}$$

wird in aller Regel hier betrachtet. κ ist die elektrische Leitfähigkeit;

$$[\kappa] = \text{A m V}^{-1} \text{ m}^{-2} = (\Omega \text{m})^{-1} = \text{S/m}$$

- Die Konvektionsstromdichte \vec{J}_K mit

$$\vec{J}_K = \rho_V \cdot \vec{v},$$

welches z.B. in Plasma vorkommt, spielt hier meist keine Rolle.

Materialgleichungen

- Die elektrischen Feldgrößen \vec{E} und \vec{D} sind voneinander abhängig:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

mit **Polarisation** \vec{P} ; $[\vec{P}] = [\vec{D}] = \text{C m}^{-2}$

- Die magnetischen Feldgrößen \vec{H} und \vec{B} sind voneinander abhängig:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

mit **Magnetisierung** \vec{M} , $[\vec{M}] = [\vec{H}] = \text{A m}^{-1}$

- Ohne Materie (im **Vakuum**) gibt es keine Polarisation und keine Magnetisierung. Es gilt $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.
- Die **Dielektrizitätskonstante/Permittivität des Vakuums** ϵ_0 und die **Permeabilität des Vakuums** μ_0 sind universelle Konstanten und mit der **Lichtgeschwindigkeit im Vakuum** c verknüpft:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \text{ also: } 30 \text{ cm/ns}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ As/(Vm)} \text{ mit } c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$$

Materialgleichungen - homogene, lineare, isotrope Medien

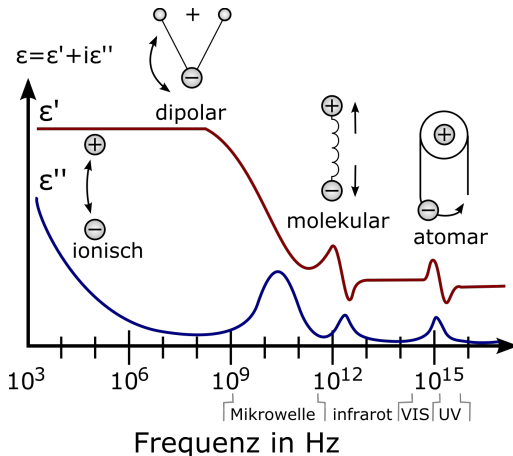
- In aller Regel werden wir uns auf **homogene, lineare, und isotrope Medien** beschränken
- Ein Medium ist **homogen** bezüglich einer bestimmten Eigenschaft, wenn diese Eigenschaft nicht vom **Ort** abhängt.
- Ein Medium ist **linear** bezüglich einer bestimmten Eigenschaft und einer bestimmten Anregung, wenn die Eigenschaft nicht von der **Amplitude** der Anregung abhängt (z.B. Federkonstante im Hookschen Bereich)
- Ein Medium ist **isotrop** bezüglich einer bestimmten Eigenschaft und einer bestimmten Anregung, wenn die Eigenschaft unabhängig von der **Richtung** der Anregung ist (z.B. ist die Polarisation in Kristallen häufig nicht isotrop bezüglich einer elektrischen Anregung).
- Es gelten dann die **Materialgleichungen für homogene, lineare, und isotrope Medien**:

$$\vec{D} = \underbrace{\epsilon_0 \epsilon_r}_{=\epsilon} \vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \underbrace{\mu_0 \mu_r}_{=\mu} \vec{H}$$

- Für Polarisation und Magnetisierung

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H}$$

Beiträge zur komplexen Permittivität



- Grundsätzlich verschiedenes Verhalten bei vorhandenen oder nicht vorhandenen Rückstellkräften
- dipolar: Polare Moleküle (z.B. Wasser) orientieren sich im Feld, keine Rückstellkraft (nur thermische Bewegung) → Debye-Relaxation
- molekular, atomar: Rückstellkräfte vorhanden → harmonischer Oszillator
- Dielektrische Spektroskopie → Aufklärung der Mechanismen

Quelle: Prof. Kenneth A. Mauritz, derivative work: Cepheiden, Attribution, via Wikimedia Commons

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Verhalten an Grenzflächen

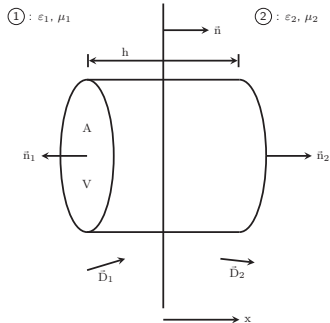
Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Normalkomponenten von \vec{D} und \vec{B}

Gaußsche Dose:



- Coulomb-Gauß-Gesetz: $\text{div } \vec{D} = \rho_V$
- Volumenintegral: $\iiint_V \text{div } \vec{D} \, dV = \iiint_V \rho_V \, dV$
- $\oiint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_V \, dV$
- Grenzübergang $h \rightarrow 0$
- $(\vec{n}_1 \cdot \vec{D}_1 + \vec{n}_2 \cdot \vec{D}_2) A = \iiint_V \rho_F \cdot \delta(x) \, dV = \rho_F \cdot A$
- $(-\vec{n}_1 \cdot \vec{D}_1 + \vec{n}_2 \cdot \vec{D}_2) A = \iiint_V \rho_F \cdot \delta(x) \, dV = \rho_F \cdot A$
- Normalkomponente von \vec{D} ist ggf. unstetig:

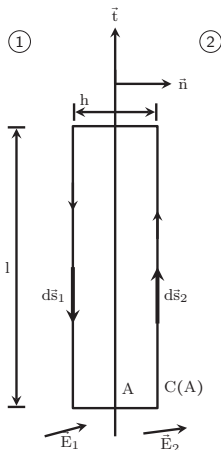
$$D_2^n - D_1^n = \rho_F$$

- Analog aus $\text{div } \vec{B} = 0$
- Normalkomponente von \vec{B} ist immer stetig:

$$B_2^n - B_1^n = 0$$

Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H}

Stokesche Fläche:

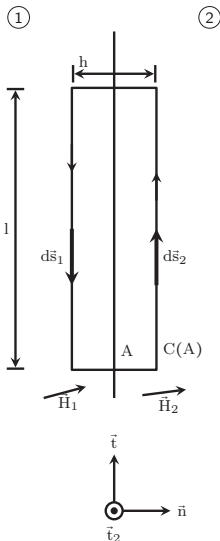


- Induktionsgesetz: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- Flächenintegral: $\iint_A \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$
- $\oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$
- Grenzübergang $h \rightarrow 0$, Flußänderung verschwindet
- $-\vec{E}_1^t \cdot \vec{l} + \vec{E}_2^t \cdot \vec{l} = 0$
- **Tangentialkomponente von \vec{E} ist immer stetig:**

$$\vec{E}_2^t - \vec{E}_1^t = 0$$

- Der Tangentialvektor \vec{t} ist nicht eindeutig. Die Beziehung gilt für alle möglichen Tangentialvektoren $\vec{t} \perp \vec{n}$

Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H}



- Durchflutungsgesetz: $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
- Flächenintegral, $h \rightarrow 0$, Änderung Verschiebungsstrom = 0:

$$-H_1^t \cdot l + H_2^t \cdot l = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{J}_A \delta(x) \cdot d\vec{A} = J_A^{t2} \cdot l$$

- Tangentialkomponente von \vec{H} ist ggf. unstetig:

$$H_2^t - H_1^t = J_A^{t2}$$

- Die Beziehung gilt für alle möglichen Tangentialvektoren mit $\vec{t}_2 = \vec{n} \times \vec{t}$

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Einteilung elektromagnetischer Felder

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



A keine Einschränkungen - Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\oiint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V$$

$$\oiint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_V dV$$

$$\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_V dV + \oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

B Statischer Grenzfall: $\frac{\partial \dots}{\partial t} = 0$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \vec{0}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\oiint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_V$$

$$\oiint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_V dV$$

$$0 + \text{div } \vec{J} = 0$$

$$0 + \oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

B.1 Elektrostatik: $\vec{J} = \vec{0}$

Grundgleichungen der Elektrostatik

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \vec{0} & \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= 0 \\ \text{div } \vec{D} &= \rho_V & \oiint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \iiint_V \rho_V dV \end{aligned}$$

für **homogene, lineare, isotrope** Medien: $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \vec{0} & \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= 0 \\ \text{div } \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon} \rho_V & \oiint_{O(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho_V dV \end{aligned}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \phi \rightarrow -\text{div } \vec{E} = \text{div grad } \phi = \Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon} \rho_V \quad (\text{Poisson-Gleichung})$$

B.2 Magnetostatik: $\rho_V = 0$

Grundgleichungen der Magnetostatik

$$\begin{array}{ll} \text{rot } \vec{H} = \vec{J} & \oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \\ \text{div } \vec{B} = 0 & \oiint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \\ \text{div } \vec{J} = 0 & \oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \end{array}$$

für **homogene, lineare, isotrope** Medien: $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$

$$\begin{array}{ll} \text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J} & \oint_{C(A)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \\ \text{div } \vec{B} = 0 & \oiint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \end{array}$$

$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \rightarrow \text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \mu \vec{J}$ (führt später zur **Eichung**)

B.3 Stationäres Strömungsfeld: $\operatorname{div} \vec{J} = 0, \vec{J} = \vec{J}_L = \kappa \vec{E}$

Grundgleichungen des Stationären Strömungsfeldes in Gebieten **ohne Elektromotorische Kraft** (siehe „Stationäres Elektrisches Strömungsfeld“)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \qquad \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \qquad \oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = \kappa \operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \oiint_{O(V)} \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

- Das E-Feld ist divergenz- und rotationsfrei
- Positive und negative Ladungen sind kompensiert: $\rho_V = 0$

C Quasistationäres Feld

- Es sind zeitliche Änderungen vorhanden; diese sind aber „langsam“.
- Momentanaufnahmen der Felder entsprechen den statischen Feldern
- Wirkungen werden „verzögerungsfrei“ übermittelt → Keine **Retardierung**
- Keine Abstrahlung
- Orts- und Zeitabhängigkeit sind entkoppelt
- Berechnungen mit den Lösungsmethoden der Statik (aber zeitabhängig)
- zwei Fälle:
 - Quasi-Elektrostatik (Induktion vernachlässigen)

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \neq \vec{0} \text{ und } \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \rightarrow \vec{0} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} \rightarrow \vec{0}$$

- Quasi-Magnetostatik (Verschiebungsstrom vernachlässigen)

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \rightarrow \vec{0} \text{ und } \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \neq \vec{0} \Rightarrow \text{rot } \vec{H} \rightarrow \vec{J}$$

C.1 Quasi-Elektrostatik

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\oiint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V$$

$$\oiint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_V dV$$

$$\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_V dV + \oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

C.2 Quasi-Magnetostatik

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\oiint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V$$

$$\oiint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_V dV$$

$$\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_V dV + \oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

- Der allgemeine Satz der Maxwell-Gleichungen ist zwar immer korrekt, aber häufig unnötig kompliziert
- Das Auffinden der Lösungen wird stark vereinfacht, wenn geeignete Annahmen gemacht werden.
- Die vorgestellte Einteilung der Vereinfachungen kann auch noch weiter granularisiert werden.
- In den folgenden Einheiten werden die Lösungsverfahren für die verschiedenen Fälle eingeführt und die zugehörigen Lösungen diskutiert.
- Lernziele:
 - Sie kennen die Maxwell-Gleichungen
 - Sie können die Beziehungen zwischen den Gleichungen erklären
 - Sie können vereinfachte Grundgleichungen entwickeln
 - Sie können Problemstellungen analysieren und Lösungen finden
 - Sie können Modelle für neue Problemstellungen entwickeln
 - Sie können für neue Problemstellungen geeignete Lösungsmethoden auswählen

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

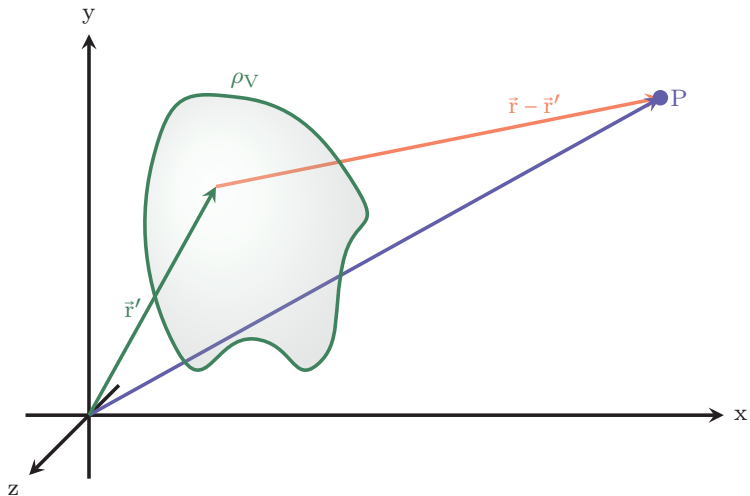
Elektrostatik-I

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Elektrostatik: Vakuum und leitenden Körpern



Elektrostatik: Vakuum und leitenden Körpern

Problem

Im Lösungsgebiet gibt als Quelle eine Ladungsverteilung $\rho_v(\vec{r})$. Abgesehen davon ist der Raum entweder Vakuum mit $\epsilon = \epsilon_0$ oder kann als perfekt leitend $\kappa \rightarrow \infty$ angesehen werden.

Statik: Die Relaxation der freien Ladungsträger in den perfekt leitenden Gebieten ist so schnell, dass alle elektrischen Felder praktisch instantan kompensiert werden:

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ in den perfekt leitenden Gebieten}$$

gesucht: Feld im Raum außerhalb der perfekten Leiter

Nebenbemerkung

später, bei harmonischer Anregung: komplexe Dielektrizitätskonstante

$$\underline{\epsilon}(\omega) = \epsilon' + j\epsilon'' = \epsilon(\omega) - j \frac{\kappa(\omega)}{\epsilon_0 \omega}$$

Grundgleichungen (außerhalb der perf. leitenden Gebiete)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

$$\oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} (\epsilon_0 \cdot \vec{E}) = \rho_V$$

$$\epsilon_0 \iiint_{O(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_V dV = Q \text{ in } V$$

In einfachen Fällen (geeignete Symmetrie) kann aus dem obigen **Coulomb-Gauss-Integral** direkt das E-Feld berechnet werden.

Kugelsymmetrische Ladungsverteilung am Ursprung

$$\rho_V(\vec{r}') = \rho_V(r') \quad \vec{E}(\vec{r}') = E(r')\vec{e}_{r'}$$

V: Kugel mit Radius r um den Ursprung: $d\vec{A} = dA\vec{e}_{r'}$ → $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) dA$

$$\begin{aligned} \oiint_{O(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} &= E(r) \oiint_{O(V)} dA = 4\pi r^2 E(r) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_V dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho_V(r') r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \\ &= \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r \rho_V(r') r'^2 dr' \\ E(r) &= \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho_V(r') r'^2 dr' \end{aligned}$$

Homogen geladene Kugel mit Radius R; keine Ladung außerhalb:

$$\rho_V(\vec{r}') = \begin{cases} \rho_V & \text{für } r' \leq R \\ 0 & \text{für } r' > R \end{cases}; \quad E(r) = \begin{cases} \frac{\rho_V}{\epsilon_0 r^2} \frac{1}{3} r^3 = \frac{\rho_V}{3\epsilon_0} r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} & \text{für } r \leq R \\ \frac{\rho_V}{\epsilon_0 r^2} \frac{1}{3} R^3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

Coulomb-Gauss-Integral: Vorteile - Nachteile

- Die Berechnung des E-Feldes aus dem **Coulomb-Gauss-Integral**

$$\oiint_{O(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_V dV$$

ist ein guter und intuitiver Lösungsweg, wenn das **linke Integral** leicht zu einem Ausdruck für $\vec{E}(\vec{r})$ für alle \vec{r} im Lösungsvolumen umgeformt werden kann.

- Ob das **rechte Integral** dann **analytisch** gelöst werden kann, ist grundsätzlich sekundär.
- Eine analytische Lösung ist zwar in jedem Fall vorzuziehen, aber im Zweifel kann das Integral immer **numerisch** gelöst werden.
- Leider kann das **linke Integral** jedoch nur ausgewertet werden, wenn **starke Symmetrien** vorliegen (wie im gezeigten Beispiel).
- Weitere Beispiele:
 - geladener Ring
 - unendlich langer, homogener geladener Zylinder
- Wir benötigen **allgemeinere Methoden** und **Methoden für weitere Spezialfälle!**

Coulomb-Integral - Skalarpotential

- Für die **Überlagerung** (Superposition) von n einzelnen Punktladungen q_j an Positionen \vec{r}_j ist das Feld bekannt, falls keine weiteren **Randbedingungen im Endlichen** vorliegen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n q_j \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$

- Beim Übergang auf eine **kontinuierliche Ladungsverteilung**

$$dq = \rho_V(\vec{r}') d^3r'$$

ergibt sich sofort das **Coulomb-Integral**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_V(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

- Es gilt

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\text{grad}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- und somit

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi \quad \text{mit} \quad \boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'}$$

Skalarpotential

Skalarpotential formal - Poisson/Laplace-Gleichungen

Lemma von Poincaré

- Ein auf einem einfach-zusammenhängenden Gebiet definiertes **wirbelfreies Vektorfeld** kann als **Gradient eines Potentialfeldes** dargestellt werden.

$$\operatorname{rot} \vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha} = \operatorname{grad} f$$

- Ein **quellenfreies Vektorfeld** auf einem konvexen Gebiet kann durch **Rotation eines Vektorpotentials** dargestellt werden.

$$\operatorname{div} \vec{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{\beta} = \operatorname{rot} \vec{\alpha}$$

- Eine **skalare Felddichte** kann als **Divergenz eines Vektorfeldes** dargestellt werden.

$$\gamma \text{ ist ein Volumen-Integrand} \Rightarrow \gamma = \operatorname{div} \vec{\beta}$$

E-Feld: $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$; „-“: Konvention; ϕ : **Elektrisches Skalarpotential**

- Für statische Probleme gilt immer $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$
- daher: $\vec{E} = -\text{grad } \phi$
- Für **einfache** Medien mit $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$: $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_V$
- einsetzen:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_V$$

$$\text{div } (-\text{grad } \phi) = \frac{1}{\epsilon} \rho_V$$

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho_V$$

Poisson-Gleichung

Spezialfall $\rho_V = 0 \rightarrow$

$$\Delta \phi = 0$$

Laplace-Gleichung

- Vorteil: Ist ϕ die Lösung des Problems, erfüllt das zugehörige $\vec{E} = -\text{grad } \phi$ **automatisch** die zweite Gleichung $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$
- Nachteil: Anstelle von zwei DGLs erster Ordnung nun eine **DGL zweiter Ordnung**.
- Bemerkung: $\vec{E}(\phi + \text{const.}) = \vec{E}(\phi)$, ϕ nur bis auf additive Konstante bestimmt.

Kraft - Feldlinie - Äquipotentialfläche

- Kraft auf eine Probeladung q im Feld $\vec{E}(\vec{r})$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

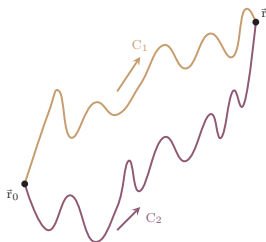
- Die **Trajektorie** einer solchen fiktiven Testladung beschreibt eine **Feldlinie** (Orientierung: von „+“ nach „-“).
- Orte mit gleichem Skalarpotential \rightarrow **Äquipotentialfläche**
- Sei $d\vec{s}$ eine kleine Verschiebung auf einer Äquipotentialfläche, dann gilt:

$$\begin{aligned}d\phi &= \phi(\vec{r} + d\vec{s}) - \phi(\vec{r}) \equiv 0 \\ &= \text{grad } \phi \cdot d\vec{s}\end{aligned}$$

also:

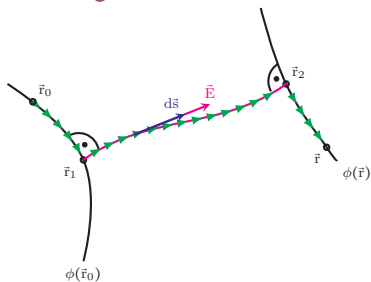
$$\text{grad } \phi \perp d\vec{s} \wedge \text{grad } \phi \parallel \vec{E} \rightarrow \boxed{\vec{E}(\text{Feldlinien}) \perp \text{Äquipotentialflächen}}$$

Wegunabhängigkeit - Potentialdifferenz



- Betrachte zwei beliebige Wege C_1 und C_2 zwischen \vec{r}_0 und \vec{r} .
- Wegen $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ gilt für jeden geschlossenen Weg C : $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$
- Der Weg $C_1 + (-C_2)$ ist ein geschlossener Weg. Daher folgt die **Wegunabhängigkeit**:

$$\int_{\vec{r}_0, C_1}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_0, C_2}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



- Wege auf Äquipotentialfläche ($\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1$ und $\vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}$) tragen nicht bei, da $d\vec{s} \perp \vec{E}$
- Wege entlang einer Feldlinie ($\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$): $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds = -|\text{grad } \phi| ds$
- Somit

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} |\text{grad } \phi| ds = \phi(\vec{r}_0) - \phi(\vec{r})$$

Spannung und Arbeit

Spannung

Man definiert die **Spannung** U_{21} als **Potentialdifferenz**:

$$U_{21} = \phi_2 - \phi_1 = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}; \quad [U] = V$$

Arbeit

Auf eine Probeladung q wirkt im E-Feld die elektrostatische Kraft $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Um die Ladung am Ort festzuhalten ist eine gegengerichtete Kraft aufzuwenden $\vec{F}_{\text{mech}} = -\vec{F}_e$. Die **Arbeit** A auf dem Weg von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 ist somit

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{\text{mech}} \cdot d\vec{s} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q(\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)) = qU_{21}$$

Elektrostatische Energie

Definition

Die **Energie** einer auf einen **endlichen Raum** beschränkten Ladungskonfiguration ρ_V entspricht der Arbeit, um Ladungen aus dem Unendlichen zu dieser Konfiguration zu bringen.

Wegen $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$ ist $\phi(\infty) = 0$ für eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung.

- N Punktladungen: Potential am Ort \vec{r}_i der ersten $(i-1)$ Punktladungen mit Ladung q_j an den Orten \vec{r}_j :

$$\phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Arbeit um Ladung q_i von ∞ nach \vec{r}_i zu bewegen: $A_i = q_i \phi(\vec{r}_i)$

Die Gesamtarbeit $A = \sum_{i=2}^N A_i$ (der Term für $i=1$ verschwindet, da der Raum bei der Verlagerung der ersten Ladung noch feldfrei ist) entspricht der **elektrostatischen Energie** W_e :

$$A = W_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} (1 - \delta_{ij})$$

Elektrostatische Energie - kontinuierliche Verteilung

- In der Formel für N Punktladungen tauchen die Terme $i = j$ nicht auf.
- Beim Übergang auf kontinuierliche Ladungsverteilungen lassen sie sich aber nicht ausschließen. Der **nicht völlig Äquivalente** Ausdruck heißt in diesem Fall somit:

$$W_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho_V(\vec{r})\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r d^3r' = \frac{1}{2} \int \rho_V(\vec{r})\phi(\vec{r}) d^3r$$

- Nebenbemerkung: Die Diskussion des Unterschieds führt zum Begriff der **Selbstenergie** einer Punktladung, der jedoch (bisher) nicht widerspruchsfrei aufgeklärt werden kann. Das ist nicht völlig überraschend, da Punktladungen nur Modelle sind.
- Mit $\rho_V = -\epsilon_0\Delta\phi$ und $\text{div}(\phi\text{grad}\phi) = \text{grad}\phi\text{grad}\phi + \phi\Delta\phi$ folgt

$$W_e = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\int \text{div}(\phi\text{grad}\phi) d^3r - \int (\text{grad}\phi)^2 d^3r \right) = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\text{grad}\phi)^2 d^3r$$
$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 d^3r \quad \text{Energiedichte: } w_e = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$$

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektrostatik-II

Theoretische Elektrotechnik

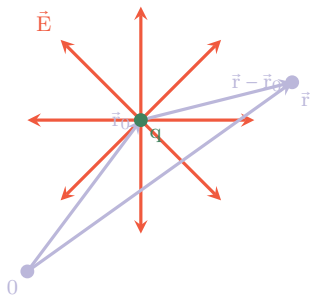
Lizenz: CC BY 3.0 DE



Elektrostatik: Einfache Spezialfälle

- Schon aus dem Grundstudium bekannte Spezialfälle
 - Plattenkondensator
 - Kugelkondensator
 - Zylinderkondensator
 - Lösungsstrategie/Algorithmus immer gleich:
 - geeignetes Koordinatensystem wählen
 - Idealisieren: Randeffekte vernachlässigen
 - Symmetrie: Feldrichtung überlegen
 - E-Feld berechnen (Coulomb-Gauß)
 - Räumlich beschränkte Ladungsverteilung → Potential im Unendlichen verschwindet
 - → Potential, Spannung, Kapazität $C = Q/U$, Energiedichte, Energie
- Das werden wir hier nicht vorrechnen.
- Schöne (einfache) Übungsaufgaben!
- Hier: Monopol → Dipol → (Quadrupol) → Multipolentwicklung

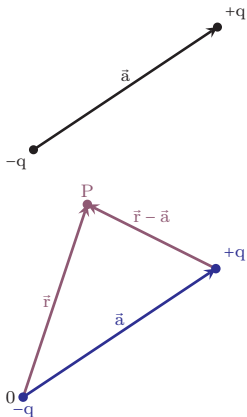
Monopol - Punktladung q am Ort \vec{r}_0



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

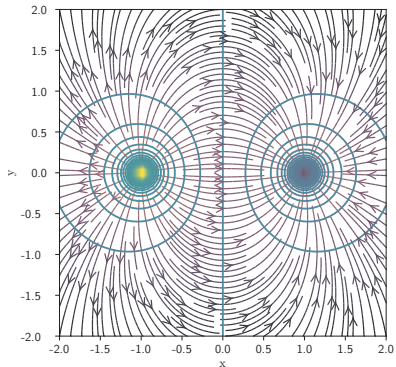
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Dipol - Zwei Punktladungen $+q$ und $-q$ mit Distanz \vec{a}



- Abstandsvektor \vec{a} von „-“ nach „+“
- **Dipolmoment:** $\vec{p} = q \cdot \vec{a}$
- Superposition liefert Feld und Potential

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-q \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + q \frac{\vec{r} - \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} \right) \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-q \frac{1}{|\vec{r}|} + q \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} \right)$$



Potential des Dipols - Taylorentwicklung

- Der Ausdruck für das Potential $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-q \frac{1}{|\vec{r}|} + q \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} \right)$ ist einfacher
- **Taylorentwicklung** eines skalaren Feldes f am Punkt \vec{r} in Richtung \vec{a}

$$f(\vec{r} + \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{a} \cdot \nabla)^n f(\vec{r}) = \exp(\vec{a} \cdot \nabla) f(\vec{r})$$

- **Taylorentwicklung** von $\frac{1}{|\dots|}$ am Punkt \vec{r} in Richtung $-\vec{a}$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{a})^2 - r^2 a^2}{r^5} + \dots$$

- Entwicklung des Potentials - Term $1/r$ fällt weg:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{r^3} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{a})^2 - r^2 a^2}{2r^5} + \dots \right]$$

Punktdipol - Dipolmoment als lokale Größe

- Bisher ist \vec{a} eine endliche Größe und das Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{a}$ somit nicht nur einem Raumpunkt zugeordnet
- Für $\vec{a} \rightarrow \vec{0}$ muss gleichzeitig $q \rightarrow \infty$ gehen, damit $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{0}} \vec{p} = \vec{p}$ bleibt.
- Dieser Übergang führt zum **Potential des Punktdipols** ϕ_D , wobei die Terme qa^2 , qa^3 , ... vernachlässigt werden können

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \text{grad} \frac{1}{r}$$

E-Feld des Punktdipols

- Weitere Berechnung in Kugelkoordinaten mit $\vec{p} \parallel \vec{e}_z$: $\vec{r} \cdot \vec{p} = rp \cos \vartheta$

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}$$

- Das Feld folgt aus $\vec{E}_D = -\text{grad } \phi_D$; $\text{grad } \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$:

$$E_{D,r} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos \vartheta}{r^3}, \quad E_{D,\vartheta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \vartheta}{r^3}, \quad E_{D,\varphi} = 0$$

- Koordinatenfrei:

$$\vec{E}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$

N diskrete Dipole - Dipoldichte - Kraft - Drehmoment

- Potential (und Feld) von N Dipolen \vec{p}_j bei \vec{r}_j folgt einfach aus Superposition:

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{\vec{p}_j \cdot (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \vec{p}_j \cdot \text{grad}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

- Übergang zu einer kontinuierlichen **Dipoldichte** $\vec{m}(\vec{r})$; $\vec{p} = \int_V \vec{m}(\vec{r}') d^3r'$:

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{m}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{m}(\vec{r}') \cdot \text{grad}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

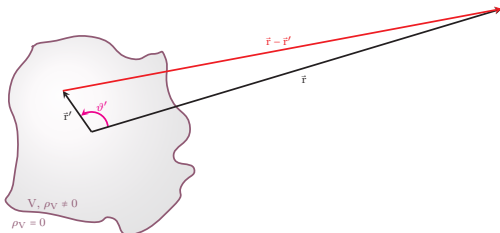
- Die **Kraft** \vec{F}_D und das **Drehmoment** \vec{M}_D berechnet mal völlig analog durch Superposition:

$$\vec{F}_D(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) \stackrel{\text{rot } \vec{E} = \vec{0}}{=} \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}))$$

$$\vec{M}_D(\vec{r}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})$$

- Überlagerung von zwei Dipolen \rightarrow **Quadrupol mit Quadrupolmoment**
- Stattdessen direkt: **Multipolentwicklung**

Multipolentwicklung



$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

- Lösung über z.B. über Coulomb-Integral möglich; in der Regel aber nicht analytisch
- Gesucht ist eine analytische Näherungslösung für $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$
- Dafür: Entwicklung von $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ für $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ nötig
- Kosinussatz

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'|^2 &= r^2 + r'^2 - 2 \cdot r \cdot r' \cdot \cos \vartheta' \\ &= r^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \cdot \frac{r'}{r} \cdot \cos \vartheta' \right] \end{aligned}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r \cdot \sqrt{1 + \varepsilon} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{r'}{r} \cdot \left(\frac{r'}{r} - 2 \cdot \cos \vartheta' \right) \quad |\vec{r}| \gg |\vec{r}'| \rightarrow \varepsilon \ll 1$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \cdot (1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon + \frac{3}{8} \cdot \varepsilon^2 - \frac{5}{16} \cdot \varepsilon^3 + \dots \right)$$

mit eingesetztem ε

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r'}{r} \cdot \left(\frac{r'}{r} - 2 \cdot \cos \vartheta' \right) \right. \\ \left. + \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \cdot \left(\frac{r'}{r} - 2 \cdot \cos \vartheta' \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{5}{16} \cdot \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \cdot \left(\frac{r'}{r} - 2 \cdot \cos \vartheta' \right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

und nach ein wenig Sortierung

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \cdot \left[1 + \frac{r'}{r} \cdot \cos \vartheta' \right. \\ \left. + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \cdot \frac{3 \cdot \cos^2 \vartheta' - 1}{2} \right. \\ \left. + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \cdot \frac{5 \cdot \cos^3 \vartheta' - 3 \cdot \cos \vartheta'}{2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Die roten Terme sind **Legendre-Polynome** $P_n(\cos \vartheta')$, somit lässt sich der Ausdruck zu

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n \cdot P_n(\cos \vartheta')$$

verkürzen. Setzt man dies in das Coulomb-Integral ein ergibt sich für $r \gg r'$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \iiint_{V'} (r')^n \cdot P_n(\cos \vartheta') \cdot \rho_V(\vec{r}') dV'$$

oder in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot & \left[\frac{1}{r} \cdot \underbrace{\iiint_{V'} \rho_V(\vec{r}') dV'}_{\text{Q in Volumen}} + \frac{1}{r^2} \cdot \iiint_{V'} \underbrace{r' \cdot \cos \vartheta'}_{\substack{\vec{r} \cdot \vec{r}' \\ = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}}} \rho_V dV' \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^3} \cdot \iiint_{V'} (r')^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \cos \vartheta' - \frac{1}{2}\right) \cdot \rho_V(\vec{r}') dV' + \dots \right]. \end{aligned}$$

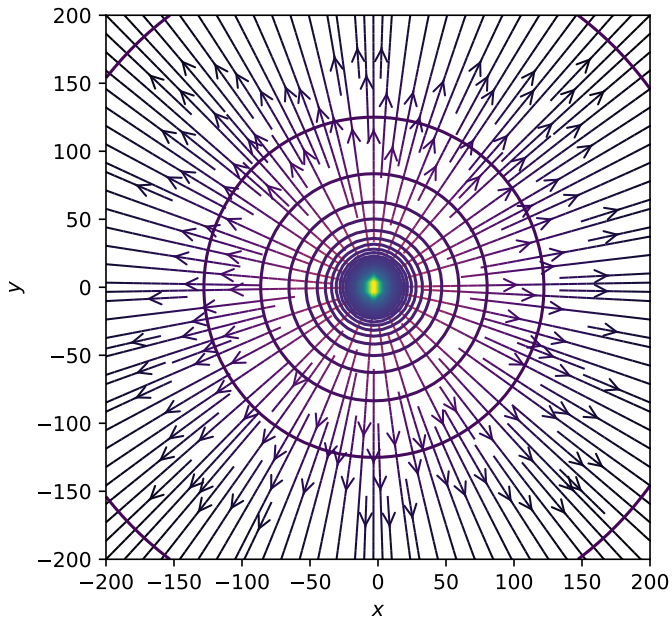
Aus der Ferne betrachtet ist der Multipol eine Punktladung und es ergibt sich eine unendliche Summe aus dem Monopolterm

$$\phi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \iiint_{V'} \rho_V(\vec{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r},$$

dem Dipolterm

$$\begin{aligned}\phi_D(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \iiint_{V'} r' \cdot \cos\vartheta' \cdot \rho_V(\vec{r}') dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \underbrace{\iiint_{V'} \vec{r}' \cdot \rho_V(\vec{r}') dV'}_{\vec{p} \text{ von Volumen}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3},\end{aligned}$$

dem Quadrupolterm, Oktopolterm und so weiter.



Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektrostatik-III: Randwertprobleme

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Elektrostatik: Randwertprobleme

Poisson-Gleichung

Das Grundproblem der Elektrostatik ist die Lösung der **Poisson-Gleichung**

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_V(\vec{r})$$

Falls **keine Randbedingungen auf Grenzflächen im Endlichen** erfüllt sein müssen kann das Potential bei bekannter Ladungsverteilung aus dem **Coulomb-Integral** (manchmal auch: **Poisson-Integral**) berechnet werden:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Randwertproblem

Gegeben sei $\rho_V(\vec{r}')$ in einem Volumen V und ϕ und/oder $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \text{grad } \phi \cdot \vec{n} = -\vec{E} \cdot \vec{n}$ auf Grenz- oder Randflächen in V . **Gesucht** ist $\phi(\vec{r})$ für $\vec{r} \in V$.

- Warum diesen beiden Randbedingungen: ϕ und/oder $\frac{\partial\phi}{\partial n}$? \rightarrow Mathematik
- Greensche Identitäten

$$\int_V [f\Delta g + (\text{grad } g \cdot \text{grad } f)] d^3r' = \oint_{O(V)} f \frac{\partial g}{\partial n} d^2r' \quad 1. \text{ Greensche Identität}$$

$$\int_V [f\Delta g - g\Delta f] d^3r' = \oint_{O(V)} \left[f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right] d^2r' \quad 2. \text{ Greensche Identität}$$

- Normalenableitung: $\frac{\partial f}{\partial n} = \text{grad } f \cdot \vec{n}$
- Beziehung für die δ -Funktion (Distribution): $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$
- Um die Poisson-Gleichung in eine Integralgleichung umzuwandeln, setzen wir in der 2. Greenschen Identität $f \rightarrow \phi(\vec{r}')$ und $g \rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$:

$$\begin{aligned} \int_V \left[\phi(\vec{r}') \Delta_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Delta_{r'} \phi(\vec{r}') \right] d^3r' &= -4\pi \int_V \phi(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \\ &+ \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= \oint_{O(V)} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right] d^2r' \end{aligned}$$

- Somit:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_{O(V)} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d^2r'$$

Diskussion der Integralgleichung für ϕ

- Wir haben folgende Integralgleichung für ϕ gefunden:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_{O(V)} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d^2r'$$

- Nur Ladungen **im** Volumen V sowie ϕ bzw. $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \text{grad } \phi \cdot \vec{n} = -\vec{E} \cdot \vec{n}$ bestimmen das Skalarpotential ϕ in V . Ladungen außerhalb von V wirken nur indirekt.
- Spezialfall: Wenn keine Ladungen in V vorhanden sind, ist das Skalarpotential vollständig durch die Randwerte festgelegt.
- Liegen die Ränder von V im Unendlichen (V ist der ganze Raum), verschwindet das Oberflächenintegral, weil der Integrand mit $1/r'^3$ abfällt. Es ergibt sich das bereits bekannte Ergebnis für das Skalarpotential im freien Raum.
- Wir werden als nächstes zeigen, dass die Lösung (für das E-Feld) bereits eindeutig bestimmt ist, wenn für Punkte $\in O(V)$
 - überall ϕ gegeben ist: **Dirichlet Randbedingungen**
 - oder überall $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \text{grad } \phi \cdot \vec{n} = -\vec{E} \cdot \vec{n}$ gegeben ist: **Neumann Randbedingungen**
 - oder für einen Teil der $O_1(V) \subseteq O(V)$ Dirichlet Randbedingungen und für einen anderen Teil $O_2(V) \subseteq O(V)$, $O_1(V) \dot{\cup} O_2(V) = O(V)$ Neumannsche Randbedingungen gegeben sind: **Gemischte Randbedingungen**

Eindeutigkeit

- Seien ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen der Poisson-Gleichung $\Delta\phi_{1,2}(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_V(\vec{r})$ mit gleichen Werten oder gleichen Normalenableitungen auf $O(V)$.
- Dann ist $\psi = \phi_1 - \phi_2$ Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\psi(\vec{r}) = 0$ mit verschwindenden Werten bzw. verschwindender Normalenableitung auf $O(V)$.
- Wir wenden die **1. Greenschen Identität** für den Fall $f = g = \psi$ an:

$$\int_V [\psi\Delta\psi + (\text{grad } \psi \cdot \text{grad } \psi)] d^3r' = \oint_{O(V)} \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} d^2r' - \int_V (\text{grad } \psi)^2 d^3r' = 0 \Rightarrow \text{grad } \psi = \vec{0}$$

- **Dirichlet:** $\psi = 0$ auf dem Rand. $\Rightarrow \psi = 0$ in V . $\rightarrow \phi_1 = \phi_2 \rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$
- **Neumann:** $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ auf dem Rand. $\Rightarrow \psi = \text{const.}$ in V . $\rightarrow \phi_1 = \phi_2 + C \rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$
- Durch Angabe von ϕ **UND** $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ an irgendeinem Punkt von $O(V)$ wäre das Problem bereits **physikalisch überbestimmt!**
- Die Gleichung

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_{O(V)} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d^2r'$$

ist somit noch nicht die Lösung, sondern „nur“ äquivalent zur Poisson-Gleichung.

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektrostatik-IV: Formale Lösung

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Greensche Funktionen - Fundamentallösung

- Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x)$ ein **linearer Differentialoperator** der auf Funktionen (besser Distributionen) angewendet wird, die auf einen Teilraum Ω des \mathbb{R}^n definiert sind.
- Eine **Greensche Funktion** oder **Fundamentallösung** $G = G(x, s)$ zum Operator \mathcal{L} am Punkt $s \in \Omega$ ist **jede Lösung** der Gleichung

$$\mathcal{L}G(x, s) = \delta^n(x - s)$$

- Die Bedeutung der Greenschen Funktionen für die Lösung inhomogener partieller Differentialgleichungen wird folgendermaßen klar:
- Multiplikation mit beliebiger Funktion $f(s)$ und Integration über s :

$$\int \mathcal{L}G(x, s)f(s)d^n s = \int \delta^n(x - s)f(s)d^n s = f(x)$$

- Der Operator \mathcal{L} ist linear und wirkt nur auf x :

$$\mathcal{L} \left[\int G(x, s)f(s)d^n s \right] = f(x)$$

- Sucht man also eine Lösung der inhomogenen lineare Differentialgleichung $\mathcal{L}y(x) = f(x)$, und kennt eine Greensche Funktion (Fundamentallösung) $G(x, s)$ - also $\mathcal{L}G(x, s) = \delta^n(x - s)$, so gilt:

$$y(x) = \int G(x, s)f(s)d^n s \text{ ist Lösung von } \mathcal{L}y(x) = f(x)$$

Eigenschaften von Greenschen Funktionen

- Wenn der **Kern** von \mathcal{L} nicht trivial (nur die Null-Funktion) ist, hat das Problem $\mathcal{L}G(x, s) = \delta^n(x - s)$ **unendlich** viele Lösungen $G(x, s)$ (Addition von Elementen des Kerns)
- Im Allgemeinen hat ein Operator \mathcal{L} keine eindeutige Greensche Funktion
- Diese Mehrdeutigkeit werden wir bei der Lösung von **Randwertproblemen** ausnutzen!
- Ohne Beweis: Greensche Funktionen sind **adjungiert symmetrisch**:
 $G(x, s) = G^\dagger(s, x)$
- Ohne Beweis, wichtiger: Ist \mathcal{L} eine **selbstadjungierter Operator**, also $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$, dann sind seine Greenschen Funktionen **symmetrisch**:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger \Rightarrow G(x, s) = G(s, x)$$

Randwertproblem der Elektrostatik

- Poisson-Gleichung: $\Delta_r \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_V(\vec{r}) \Rightarrow \mathcal{L} = \Delta_r$ selbstadjungiert
- Bestimmungsgleichung für Greensche Funktion: $\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$
(konstanter Faktor unbedeutend!)
- Bekannte Identität: $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$
- Damit ist **eine** Greensche Funktion des Laplace-Operators bereits gefunden:

$$\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \text{ gilt für } G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Zu **dieser speziellen** Greenschen Funktion kann jedes Element $\Gamma(\vec{r}, \vec{r}')$ des Kerns des Laplace-Operators ($\Delta_r \Gamma(\vec{r}, \vec{r}') = 0$) addiert werden, wobei Γ eine symmetrische Funktion sein muss (Laplace ist selbstadjungiert):

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \Gamma(\vec{r}, \vec{r}') \text{ mit } \Delta_r \Gamma(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \Gamma(\vec{r}, \vec{r}') = \Gamma(\vec{r}', \vec{r})$$

Skalarpotential berechnen

- Wir setzen (wieder) in die 2. Greenschen Identität ein: $f \rightarrow \phi(\vec{r}')$ und $g \rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}')$:

$$\begin{aligned}\int_V [\phi(\vec{r}')\Delta_{r'}G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}')\Delta_{r'}\phi(\vec{r}')] d^3r' &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \phi(\vec{r}')\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')d^3r' \\ &+ \frac{1}{\epsilon_0} \int_V G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}')d^3r' \\ &= \oint_{O(V)} \left[\phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right] d^2r'\end{aligned}$$

- Somit:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho_V(\vec{r}')G(\vec{r}, \vec{r}')d^3r' + \epsilon_0 \oint_{O(V)} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] d^2r'$$

- Freie Wahl von $\Gamma!$ \rightarrow Anpassung an gegebene Randbedingungen!

Dirichlet-Randbedingungen; ϕ auf $O(V)$ vorgegeben

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' + \varepsilon_0 \oint_{O(V)} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] d^2r'$$

- Wunsch: Wähle $\Gamma(\vec{r}, \vec{r}')$ so, dass

$$\oint_{O(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} d^2r' = 0$$

- Naheliegender (und häufig verwendeter) Ansatz:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \text{ für } \vec{r}' \in O(V)$$

- Damit:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' - \varepsilon_0 \oint_{O(V)} \phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} d^2r'$$

Neumann-Randbedingungen; $\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\vec{E} \cdot \vec{n}$ auf $O(V)$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r' + \varepsilon_0 \oint_{O(V)} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] d^2 r'$$

- Wunsch: Wähle $\Gamma(\vec{r}, \vec{r}')$ so, dass

$$\oint_{O(V)} \phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} d^2 r' = 0$$

- Naheliegender (und NICHT funktionierender) Ansatz:

$$\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = 0 \text{ für } \vec{r}' \in O(V)$$

- Einerseits:

$$\int_V \Delta_{r'} G(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r' = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' = -\frac{1}{\varepsilon_0}$$

- Andererseits:

$$\int_V \Delta_{r'} G(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r' = \oint_{O(V)} \text{grad}_{r'} G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{n}' d^2 r' = \oint_{O(V)} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} d^2 r'$$

Neumann-Randbedingungen; $\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\vec{E} \cdot \vec{n}$ auf $O(V)$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' + \varepsilon_0 \oint_{O(V)} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] d^2r'$$

- Nächstbester Ansatz: Wähle $\Gamma(\vec{r}, \vec{r}')$ so, dass

$$-\varepsilon_0 \oint_{O(V)} \phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} d^2r' = \phi_0 \text{ mit } \phi_0 = \text{const.}$$

- Häufig gewählt:

$$\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = -\frac{1}{\varepsilon_0 S} \text{ für } \vec{r}' \in O(V), \quad S = \text{Oberfläche}$$

- damit:

$$\phi_0 = \frac{1}{S} \oint_{O(V)} \phi(\vec{r}') d^2r'$$

- Das ergibt dann:

$$\phi(\vec{r}) - \phi_0 = \int_V \rho_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' + \varepsilon_0 \oint_{O(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} d^2r'$$

Konkrete Lösungsverfahren

- Wenn die Funktion Γ (und damit G) gefunden werden kann, dann ist das Poisson-Problem gelöst.
- Konkrete Methoden zur Lösung werden im Folgenden betrachtet
- Spiegelungsmethode, Bildladungsmethode: Platziere zusätzliche Ladungen außerhalb von V . Deren Feld ist das gesuchte Γ , wenn die Überlagerung die Randbedingungen erfüllt
- Entwicklung nach orthogonalen Funktionen: Für geeignete Geometrien können die Randbedingungen durch eine geeignete funktionale Basis erfüllt werden. Lösungen sind dann Überlagerungen dieser Basis.
- Separation der Variablen: Aus der Problemgeometrie abgeleiteter Ansatz für die Lösung, der in geeigneten Fällen zu einer direkt berechenbaren Lösung führt.

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektrostatik-V: Spiegelungsmethode

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE

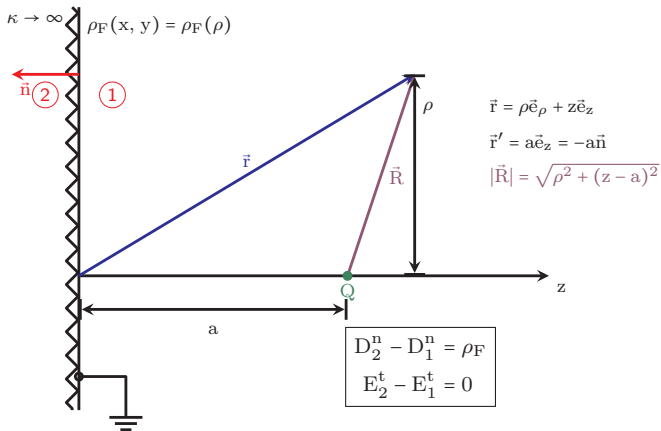


Idee der Spiegelungsmethode

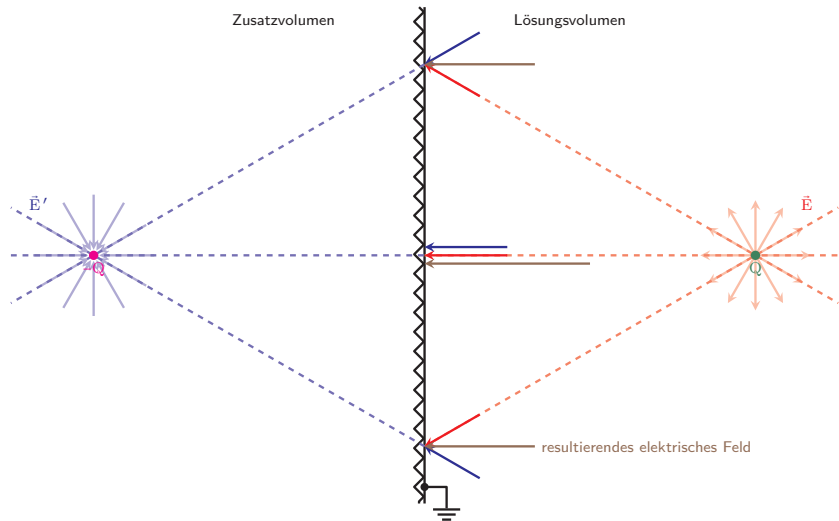
Die formale Lösung des Randwertproblems **Poisson-Gleichung** mit Randbedingungen **Dirichlet und/oder Neumann** im Endlichen mittels **Greenscher Funktionen** hat folgendes aufgezeigt:

- Das **Superpositionsprinzip** ist fundamental: Aus einer Lösung (Greensche Funktion) der Poisson-Gleichung für eine **Punktladung** (δ -Inhomogenität) folgt formal sofort die Lösung für beliebige Inhomogenität $\rho_V(\vec{r}')$: $\phi(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}') \rho_V(\vec{r}') d^3 r'$
- Dieser Teil der Lösung ist vollständig durch die **Ladungen im Lösungsvolumen** bestimmt
- Damit die Gesamtlösung die vorgegeben Randbedingungen erfüllt, muss die **Greensche Funktion des Freiraums** $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ verändert werden.
- Der zusätzliche Summand ist Lösung der zugehörigen **Laplace Gleichung** (homogen, **keine Ladungen in V**)
- **Idee**: Konstruiere für jede Punktladung im Lösungsvolumen Ladungen **außerhalb** des Lösungsvolumens so, dass in der Überlagerung die Randbedingungen erfüllt sind.
- Die Ladungen außerhalb haben nur mittelbaren Einfluss auf die Gesamtlösung, indem sie den Einfluss der **influenzieren Oberflächenladungen** nachbilden.

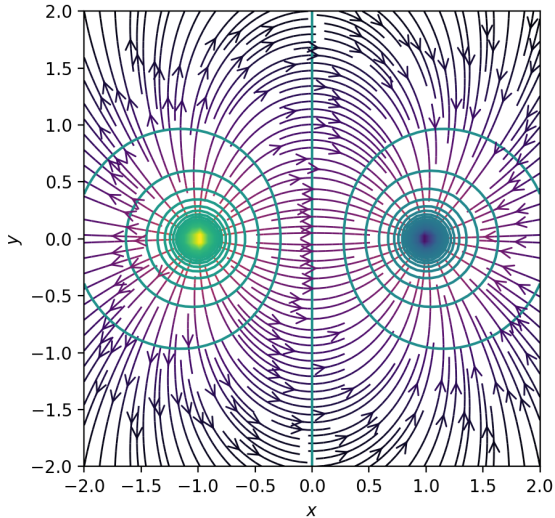
Punktladung vor leitender Ebene - Anordnung



Punktladung vor leitender Ebene - Anordnung



Punktladung vor leitender Ebene - Anordnung



Berechnung Potential, Feld

- Randbedingungen: $E^t(z=0) = 0$ bzw. $\phi(z=0) = 0$.
- Superposition der skalaren Potentiale

$$\phi(\vec{r}) = \phi_1 + \phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{Q}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} + \frac{-Q}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}} \right]$$

- Da keine Abhängigkeit von φ vorliegt, ergibt sich für das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\left(\frac{\rho}{(\rho^2 + (z-a)^2)^{3/2}} - \frac{\rho}{(\rho^2 + (z+a)^2)^{3/2}} \right) \cdot \vec{e}_\rho \right. \\ \left. + \left(\frac{z-a}{(\rho^2 + (z-a)^2)^{3/2}} - \frac{z+a}{(\rho^2 + (z+a)^2)^{3/2}} \right) \cdot \vec{e}_z \right]$$

- Für die Ebene $z=0$ gilt demnach

$$\vec{E}(z=0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[0 \cdot \vec{e}_\rho - 2 \cdot \frac{a}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_z \right] \\ = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_z \\ = E_z \cdot \vec{e}_z = -E^n \cdot \vec{e}_z, \rightarrow \text{Nur eine Normalkomponente}$$

Berechnung Ladung

- Stetigkeitsbedingung: $-\varepsilon_0 E^n = \varepsilon_0 E_z = \rho_F \rightarrow$

$$\rho_F(\rho) = -\frac{Qa}{2\pi(\rho^2 + a^2)^{3/2}}$$

- Gesamtladung der Fläche:

$$Q_{\text{ges.Fläche}} = \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\rho'=0}^{\infty} \rho_F(\rho') \rho' d\rho' d\varphi' = -Q$$

- Gesamtladung der Anordnung = 0 \rightarrow Kein Monopolterm in Multipolentwicklung (reiner Dipol!)
- Zu beachten ist, dass die Gleichungen nur für das Lösungsgebiet gültig sind!

Greensche Funktion des Halbraums

$$z \geq 0$$

- Für die beschriebene Geometrie haben wir das Skalarpotential für eine Punktladung gefunden

$$\phi(\vec{r}) = \phi_1 + \phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{Q}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} + \frac{-Q}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}} \right]$$

- Die Punktladung entspricht der δ -Inhomogenität
- Daher kennen wir nun auch die **Greensche-Funktion des Halbraums**

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right], \quad \vec{r}'' = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \rightarrow \vec{r}'' = \rho\vec{e}_\rho - z\vec{e}_z$$

- Damit können auch **andere Randwertprobleme gleicher Geometrie** gelöst werden:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' + \epsilon_0 \oint_{O(V)} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] d^2r'$$

$$\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\vec{r} + \vec{r}'}{|\vec{r} + \vec{r}'|^3} \right] \cdot \vec{n}$$

Nachrechnen für $\phi(z=0) = \phi_0$

- Wir gehen wieder in die explizite Form in Zylinderkoordinaten

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} + \frac{-1}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}} \right]$$

- Allgemein:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' + \epsilon_0 \oint_{O(V)} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] d^2r'$$

- Für die Normalenableitung am Ort der Oberfläche:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{O(V)} &= \text{grad } G \cdot \vec{n}|_{O(V)} = - \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2}(\rho^2 + (z-a)^2)^{-3/2}(2z-2a) + \frac{1}{2}(\rho^2 + (z+a)^2)^{-3/2}(2z+2a) \right]_{z=0} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{a}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \right] = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Nachrechnen für $\phi(z=0) = \phi_0$ (fortgesetzt)

- Für Dirichlet Randbedingungen $\phi(z=0) = \phi_0$:

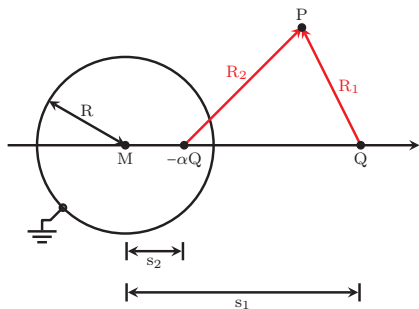
$$\phi(\vec{r}) = \phi_V + \phi_{O(V)} = \int_V \rho_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' - \varepsilon_0 \oint_{O(V)} \phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} d^2r'$$

- Einsetzen der Normalenableitung und des Potentials auf der Oberfläche:

$$\begin{aligned}\phi_{O(V)} &= -\varepsilon_0 \phi_0 \int_{O(V)} \frac{-1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{a}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \rho d\rho d\varphi \\ &= \phi_0 \int_0^\infty \frac{a\rho}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho, \quad \zeta = \rho^2 + a^2, \quad d\zeta = 2\rho d\rho \\ &= \frac{1}{2} \phi_0 a \int_{a^2}^\infty \frac{1}{\zeta^{3/2}} d\zeta = \frac{1}{2} \phi_0 a \left[\frac{-2}{\sqrt{\zeta}} \right]_{a^2}^\infty = \frac{1}{2} \phi_0 a \left[-0 + \frac{2}{a} \right] \\ &= \phi_0 \frac{a}{a} = \phi_0\end{aligned}$$

- Wie erwartet gilt also $\phi(\vec{r}) = \phi_V + \phi_0$

Spiegelung an der Kugel



- Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{|\vec{r}\vec{e}_r - s_1\vec{e}'_r|} - \frac{\alpha Q}{|\vec{r}\vec{e}_r - s_2\vec{e}'_r|} \right]$$

- Einsetzen von $\phi(\vec{r} = R\vec{e}_r) = 0$:

$$\frac{1}{|R\vec{e}_r - s_1\vec{e}'_r|} = \frac{\alpha}{|R\vec{e}_r - s_2\vec{e}'_r|}$$

- Die Bedingung wird erfüllt mit

$$\boxed{s_2 = \frac{R^2}{s_1}, \quad \alpha = \frac{R}{s_1}}$$

Greensfunktion der Kugel

- Mit den gefundenen Bedingungen ergibt sich das Potential ϕ bzw. die **Greensche Funktion der Kugel** $G(\vec{r}, \vec{r}') = \phi/Q$ zu:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{\left| \frac{r'}{R} \vec{r} - \frac{R}{r'} \vec{r}' \right|} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[(r^2 + r'^2 - 2rr' \vec{e}_r \cdot \vec{e}_{r'})^{-1/2} - \left(\frac{r^2 r'^2}{R^2} + R^2 - 2rr' \vec{e}_r \cdot \vec{e}_{r'} \right)^{-1/2} \right]$$

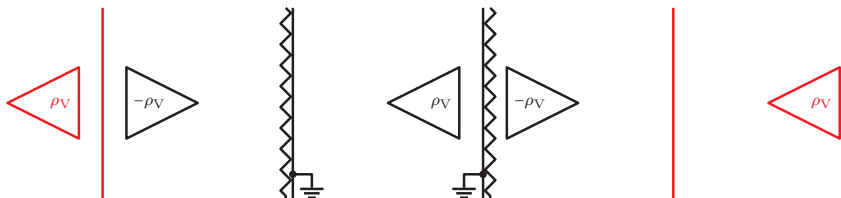
- Symmetrisch, Randbedingung des Potentials erfüllt, Poissongleichung im Lösungsvolumen erfüllt, Eindeutigkeit der Lösung \rightarrow fertig!
- Wieder kann hiermit eine ganze Klasse von Problem gelöst werden:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r' + \epsilon_0 \oint_{O(V)} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] d^2 r'$$

$$\left. \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right|_{O(V)} = - \left. \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial r'} \right|_{r'=R} = - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{R} \frac{r^2 - R^2}{(r^2 + R^2 - 2rR \vec{e}_r \cdot \vec{e}_{r'})^{3/2}}$$

Mehrere Spiegelebenen

- Der Fall mehrerer (ideal leitender) Ränder führt zu einer Reihe von Spiegelungen.
- Hierbei müssen auch die **Spiegelungen der Spiegelung** berücksichtigt werden.
- Nur bei günstigen Geometrien konvergiert die Reihe.



Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektrostatik-VI: Orthogonale Funktionensysteme

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Motivation

- Analytische Lösungen von Poisson- und Laplace-Gleichung können in der Regel nur für **spezielle Geometrien** angegeben werden.
- Aufgrund der besonderen Bedeutung von analytischen Lösungen versucht man viele verschiedene Ansätze, um diese zu finden.
- Immer wieder stellt man dabei fest, dass eine **Reihenentwicklung** nach problemangepassten **Basisfunktionen/Eigenfunktionen** sehr hilfreich ist.
- Beispiele für solche Reihenentwicklungen sind die **Fourier-Reihe** oder die Entwicklung in **Kugelflächenfunktionen**
- Dieses Kapitel dient der Auffrischung der mathematischen Definitionen und gibt Beispiele
- Die Aussagen werden auch **außerhalb der Elektrostatik** weiter verwendet!

Quadratintegrale Funktion

Für ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet $L^2(D)$ (L^p : Lebesgue-Raum der p-fach integrierbaren Funktionen) den Raum der Funktionen $U : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\int_D |U(x)|^2 dx = \int_D U^*(x)U(x)dx < \infty$$

und der durch das Skalarprodukt

$$\langle U, V \rangle = \int_D U^*(x)V(x)dx$$

induzierte Norm $\| \cdot \|$:

$$\|U(x)\| = \sqrt{\langle U, U \rangle} = \sqrt{\int_D U^*(x)U(x)dx} = \sqrt{\int_D |U(x)|^2 dx}$$

Mit dem oben definiertem Skalarprodukt ist der Raum der quadratintegralen Funktionen ein **Hilbertraum**.

Orthogonalität

Seien für $n \in \mathbb{N}$ U_n Funktionen aus $L^2(D)$. Die Funktionen U_n sind zueinander **orthogonal**, wenn gilt

$$\langle U_n, U_m \rangle = \int_D U_n^*(x) U_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ c_{nm} \neq 0 & \text{für } n = m \end{cases}$$

Orthonormalität

Seien für $n \in \mathbb{N}$ U_n Funktionen aus $L^2(D)$. Die Funktionen U_n sind zueinander **orthonormal**, wenn gilt

$$\langle U_n, U_m \rangle = \int_D U_n^*(x) U_m(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

Vollständigkeit

- Es sei $f(x)$ eine quadratintegrale Funktion und $U_n(x)$ seien quadratintegrale, zueinander orthonormale Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}^n$.
- Weiter sei

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n U_n(x)$$

eine **lineare Überlagerung** der ersten N Funktionen $U_n(x)$ mit Koeffizienten c_n .

- Eine solche Überlagerung heißt auch **Entwicklung nach U_n** . Die c_n sind die **Entwicklungskoeffizienten**.
- Gesucht sind nun Koeffizienten c_n , so dass f_N die Funktion $f(x)$ **möglichst gut approximiert** in Sinne, dass

$$\|f(x) - f_N(x)\|^2 = \langle f(x) - f_N(x), f(x) - f_N(x) \rangle = \int_D |f(x) - f_N(x)|^2 dx = \text{minimal}$$

- Wir formen zunächst den Integranden um und fassen das Integral als Funktion von c_n (bzw. c_n^*) auf:

$$f_{\Delta} = \int_D |f(x) - f_N(x)|^2 dx = \int_D f^* f dx - \sum_{n=1}^N c_n^* \int_D U_n^* f dx - \sum_{n=1}^N c_n \int_D U_n f^* dx + \sum_{n=1}^N c_n^* c_n$$

- Da das Integral

$$f_{\Delta} = \int_D |f(x) - f_N(x)|^2 dx = \int_D f^* f dx - \sum_{n=1}^N c_n^* \int_D U_n^* f dx - \sum_{n=1}^N c_n \int_D U_n f^* dx + \sum_{n=1}^N c_n^* c_n$$

minimiert werden soll, bildet man die Ableitungen.

- Für die Ableitungen gilt

$$\frac{\partial f_{\Delta}}{\partial c_n} = - \int_D U_n f^* dx + c_n^* \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial f_{\Delta}}{\partial c_n^*} = - \int_D U_n^* f dx + c_n \stackrel{!}{=} 0$$

- Offenbar ergibt sich hieraus die beste Wahl der Koeffizienten zu

$$c_n = \int_D U_n^* f dx$$

- Man spricht von **Konvergenz im quadratischen Mittel** falls mit der obigen Wahl von c_n gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_D |f(x) - f_N(x)|^2 dx = 0$$

Vollständige Funktionensysteme

Ein orthonormales Funktionensystem $U_n(x)$ auf D , $n = 1, 2, 3, \dots$, heißt **vollständig**, falls für **jede quadratintegrale Funktion** $f(x)$ auf D die Reihe

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \underbrace{\left(\int_D U_n^*(x') f(x') dx' \right)}_{c_n} U_n(x)$$

im Mittel gegen $f(x)$ konvergiert.

Es gilt dann

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\int_D U_n^*(x') f(x') dx' \right)}_{c_n} U_n(x),$$

woraus die **Vollständigkeitsrelation**

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(x') U_n(x) = \delta(x - x') \text{ folgt.}$$

Fourier-Reihe

- Für $D = [-a, a]$ ist

$$U_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$U_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$U_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots$$

ein vollständiges Funktionensystem.

- Die Entwicklung

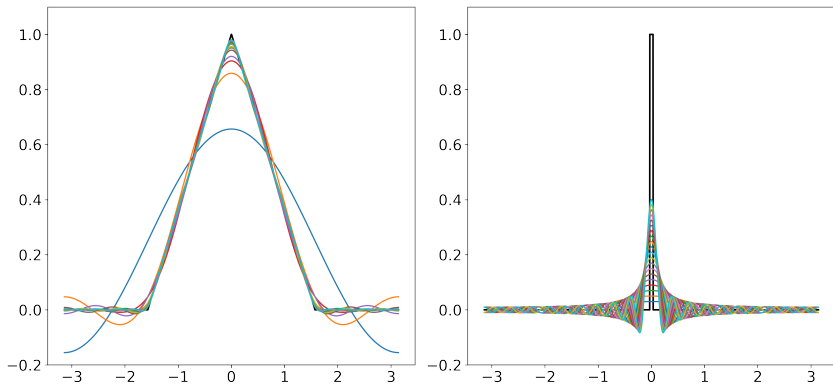
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right]$$

heißt **Fourier-Reihe** von $f(x)$.

- Hierbei ist

$$a_0 = \sqrt{2a} \overline{f(x)}; \quad a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) f(x) dx; \quad b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) f(x) dx$$

Auch wenn jede Funktion als Fourier-Reihe entwickelt werden kann, heißt das noch nicht, dass die Fourier Entwicklung in jedem Fall besonders geeignet ist!



Kugelflächenfunktionen (spherical harmonics)

- Wir betrachten die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

$$\Delta\phi = 0 \text{ mit } \Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)}_{\Delta_r: \text{ Radialanteil}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)}_{\Delta_{\vartheta\varphi}: \text{ Winkelanteil}}$$

- Ansatz zur Lösung (siehe später auch **Separation der Variablen**)

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = R_l(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \text{ Produktansatz}$$

- Einsetzen in Laplace-Gleichung:

$$\Delta\phi = \Delta(R_l Y_{lm}) = \left(\Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta\varphi} \right) (R_l Y_{lm}) = \boxed{Y_{lm} \Delta_r R_l + \frac{R_l}{r^2} \Delta_{\vartheta\varphi} Y_{lm} \stackrel{!}{=} 0}$$

- Umgeformt:

$$\boxed{\frac{r^2 \Delta_r R_l}{R_l} = - \frac{\Delta_{\vartheta\varphi} Y_{lm}}{Y_{lm}} = \text{const.} = l(l+1)}$$

Zwei neue Differentialgleichungen

- Die gefundene Identität

$$\frac{r^2 \Delta_r R_l}{R_l} = - \frac{\Delta_{\vartheta\varphi} Y_{lm}}{Y_{lm}} = \text{const.} = l(l+1)$$

liefert zwei neue Differentialgleichungen (eine gDGL und eine pDGL):

$$\Delta_r R_l = \frac{l(l+1)}{r^2} R_l \quad (\text{Radialgleichung}) \rightarrow R_l(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$$

$$\Delta_{\vartheta\varphi} Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm} \quad (\text{Winkelgleichung})$$

- Die **Winkelgleichung** ist eine **Eigenwertgleichung**: Die Funktionen Y_{lm} sind Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $-l(l+1)$.
- Der doppelte Index „lm“ deutet schon an, dass es zu jedem Eigenwert $-l(l+1)$ **mehrere Eigenfunktionen** geben kann \rightarrow **Entartung**
- Lösungen der Winkelgleichungen existieren für $l \in \mathbb{N}_0$ und $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$. Diese Lösungen Y_{lm} heißen **Kugelflächenfunktionen**.
- Die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} bilden ein **vollständiges Funktionensystem auf der Einheitskugel**.

Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen

- Die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} stehen in Zusammenhang mit den **zugeordneten Legendrepolynomen** $P_{lm}(z)$:

$$Y_{lm} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, (\vartheta, \varphi) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}}_{N_{lm}} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{jm\varphi}$$

- Anschauliche Erklärung und Visualisierung (Physikdidaktik WWU Münster): <https://youtu.be/FqAzWkwiEs8> bzw. <https://www.quantumvisions.net>

Y_{lm}	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$
$m = -2$			$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{-j2\varphi}$
$m = -1$		$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{-j\varphi}$	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-j\varphi}$
$m = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$
$m = +1$		$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{j\varphi}$	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{j\varphi}$
$m = +2$			$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{j2\varphi}$

Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen (...)

- Orthonormalität: $\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{l'm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) d(\cos \vartheta) d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$
- Vollständigkeitsrelation: $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\vartheta - \vartheta')$
- Entwicklungssatz für $f = f(\vartheta, \varphi)$ quadratintegrale Funktion auf der Einheitskugel:

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \text{ mit}$$

$$c_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) f(\vartheta, \varphi) d(\cos \vartheta) d\varphi$$

- Damit (und dem Produktansatz) auch Entwicklungssatz für $\phi = \phi(r, \vartheta, \varphi)$ quadratintegrale Funktion auf dem \mathbb{R}^3 :

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \underbrace{c_{lm} R_l(r)}_{R_{lm}(r) = c_{lm} (Ar^l + Br^{-(l+1)})} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \text{ mit}$$

$$R_{lm}(r) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \phi(r, \vartheta, \varphi) d(\cos \vartheta) d\varphi$$

Schlussbemerkungen

- Die beiden hier vorgestellten vollständigen Funktionensysteme werden nicht die einzigen bleiben.
- Bei kartesischen Symmetrien: häufig **harmonische Funktionen** (Fourier) eine gute Wahl
- Bei sphärischer Symmetrie: häufig **sphärisch harmonische Funktionen** (Kugelflächenfunktionen) eine gute Wahl
- Bei zylindrischer Symmetrie: häufig **Bessel-Funktionen** eine gute Wahl
- Wir werden das wieder aufgreifen, wenn entsprechende Probleme betrachtet werden.

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektrostatik-VII: Separationsverfahren

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Problemstellung

- Wir untersuchen weiterhin Lösungsmethoden der **Poisson-Gleichung**

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \text{ in } V$$

mit **Dirichlet-** und/oder **Neumann-Randbedingungen** auf der Oberfläche von V :

$$\forall \vec{r}_b \in O(V) : \phi(\vec{r}_b) \underline{\vee} \left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_b} \text{ vorgegeben}$$

- In Fällen, in denen die Problemgeometrie gut zu den Symmetrien des Koordinatensystems passt, kann sich ein **Separationsansatz** bzw. **Produktansatz** lohnen.
- Ziel ist es hierbei, die partielle Differentialgleichung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu überführen.
- Randbedingungen werden dann durch geeignete Anpassung der Konstanten berücksichtigt.
- Ansatz für Koordinaten (x_1, x_2, x_3) : $\phi(\vec{r}) = f(x_1) \cdot g(x_2) \cdot h(x_3)$

Laplacegleichung in 2D mit Randbedingungen

- Wir betrachten folgendes 2D Problem:
 - Lösungsvolumen: $V = [0, x_0] \times [0, y_0]$ (Rechteck in der x - y -Ebene)
 - Randwerte: $\phi(x, y) = 0$ für $x = 0$, $x = x_0$ und $y = 0$ sowie $\phi(x, y_0) = \phi_0(x)$
 - keine Ladungen in V , also $\Delta\phi = 0$ in V
- Mit dem Laplaceoperator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ und dem Ansatz $\phi(x, y) = f(x)g(y)$ folgt

$$\begin{aligned}\Delta\phi(x, y) = \Delta[f(x)g(y)] &= g(y) \frac{d^2f(x)}{dx^2} + f(x) \frac{d^2g(y)}{dy^2} = 0 \\ \frac{1}{f(x)} \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{d^2g(y)}{dy^2} &= 0 \quad (\text{für } \phi \neq 0)\end{aligned}$$

- Offensichtlich müssen die beiden Summanden sich gegenseitig aufheben:

$$\boxed{-\frac{1}{f(x)} \frac{d^2f(x)}{dx^2} = k^2 = \frac{1}{g(y)} \frac{d^2g(y)}{dy^2}} \in \mathbb{R}$$

- Ein positiver Wert (oder Null) für $\frac{1}{f(x)} \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ führt auf den gegebenen Randbedingungen zu keiner Lösung.

– Allgemeine Lösung:

$$f''(x) = -k^2 f(x)$$

$$f(x) = \alpha \sin(kx) + \beta \cos(kx)$$

$$g''(y) = k^2 g(y)$$

$$g(y) = \gamma \sinh(ky) + \delta \cosh(ky)$$

– Randbedingungen „links“ ($x = 0$), „unten“ ($y = 0$) und „rechts“ ($x = x_0$):

$$\phi(x = 0, y) = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\phi(x, y = 0) = 0$$

$$\delta = 0$$

$$\phi(x = x_0, y) = 0$$

$$\alpha \sin(kx_0) = 0 \Rightarrow$$

$$k = k_n = \frac{n\pi}{x_0} \quad n \in \mathbb{N}$$

– Die vollständige Lösung - die aber noch nicht die Randbedingung „oben“ erfüllt, ist daher:

$$\phi(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y\right)$$

- Die vollständige Lösung und Randbedingung „oben“:

$$\phi(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y\right)$$

$$\phi(x, y = y_0) = \phi_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right)$$

- Auflösen nach $c_n \rightarrow$ Summe auf einen Term reduzieren
- Dazu **Orthogonalität** und **Vollständigkeitsrelation** nutzen \rightarrow Multiplikation mit $\sin\left(\frac{m\pi}{x_0} x\right)$ und **Integration über $[0, x_0]$** :

$$\phi_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{x_0} x\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{x_0} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right)$$

$$\int_0^{x_0} \phi_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{x_0} x\right) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \underbrace{\int_0^{x_0} \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{x_0} x\right) dx}_{\frac{x_0}{2} \delta_{mn}} \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right)$$

$$c_n = \frac{2}{x_0 \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right)} \int_0^{x_0} \phi_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) dx$$

Poissongleichung mit Randbedingungen → Symmetrie, formale Lösung (Green) und Separation

- Lösungsvolumen: $V = [-\infty, \infty] \times [0, d] \times [-\infty, \infty]$
- Randwerte: $\phi(x, y = 0, z) = \phi(x, y = d, z) = 0$
- Quelle: konstante Ladungsdichte entlang z :
 $\rho_V(\vec{r}) = \rho_L \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$; x_0 beliebig; $y_0 \in (0, d)$
- Symmetrie: **Translationsinvarianz** in z -Richtung: Lösung unabhängig von z → **2D**

$$\phi(x, y, z) = \phi(x, y); V \rightarrow A = [-\infty, \infty] \times [0, d]; \rho_V \rightarrow \rho_F(x, y) = q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

- Möglichkeit: Formale Lösung → Greensche-Funktion z.B: durch (unendliche) Spiegelung → fertig.
- Alternative: Aufteilen des Lösungsgebietes in den Bereich A_- „links“ von $x = x_0$ und den Bereich A_+ „rechts“ von $x = x_0$:

$$A_- = \{\vec{r} = (x, y) \mid x < x_0 \wedge 0 \leq y \leq d\}$$

$$A_+ = \{\vec{r} = (x, y) \mid x > x_0 \wedge 0 \leq y \leq d\}$$

- Durch die Aufteilung in A_- und A_+ muss dort „nur“ noch die Laplace-Gleichung gelöst werden

$$\Delta\phi_-(x,y) = 0 \text{ für } (x,y) \in A_-; \quad \Delta\phi_+(x,y) = 0 \text{ für } (x,y) \in A_+$$

- mit den Randbedingungen

- $\phi_{\pm}(x, y = 0) = \phi_{\pm}(x, y = d) = 0$ (Dirichlet)
- $-\varepsilon_0 \left(\frac{\partial\phi_+}{\partial x} - \frac{\partial\phi_-}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = q\delta(y - y_0) = \sigma(y)$ (Neumann)
- $\phi_-(x \rightarrow -\infty) = 0 = \phi_+(x \rightarrow +\infty)$ (RB im Unendlichen)

- Produktansatz in der x - y -Ebene: $\phi_{\pm}(x, y) = f(x) \cdot g(y)$

- Umformen der Laplace-Gleichung: $\frac{1}{f(x)} \frac{d^2f(x)}{dx^2} = k^2 = -\frac{1}{g(y)} \frac{d^2g(y)}{dy^2}$

- Lösungen:

$$f(x) = \alpha e^{kx} + \beta e^{-kx}$$

$$g(y) = \gamma \sin(ky) + \delta \cos(ky); \quad k > 0 \text{ o.B.d.A.}$$

- $\phi_{\pm}(x, y = 0) = 0 \Rightarrow \delta = 0$, $\phi_{\pm}(x, y = d) = 0 \Rightarrow k = k_n = \frac{n\pi}{d}$ für $n \in \mathbb{N}$

- Lösung soweit: $\phi_{\pm}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{\pm} \left[\alpha e^{\frac{n\pi}{d}x} + \beta e^{-\frac{n\pi}{d}x} \right] \gamma \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right)$
- Mit den Randbedingungen $\phi_{-}(x \rightarrow -\infty, y) = 0 = \phi_{+}(x \rightarrow +\infty, y)$:

$$\phi_{\pm}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{\pm} e^{\mp \frac{n\pi}{d}x} \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right)$$

- Die Lösung muss bei $x = x_0$ stetig sein:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{+} e^{-\frac{n\pi}{d}x_0} \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{-} e^{+\frac{n\pi}{d}x_0} \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right)$$

- Dies erfordert:

$$C_n^{+} e^{-\frac{n\pi}{d}x_0} = C_n^{-} e^{+\frac{n\pi}{d}x_0} = A_n; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

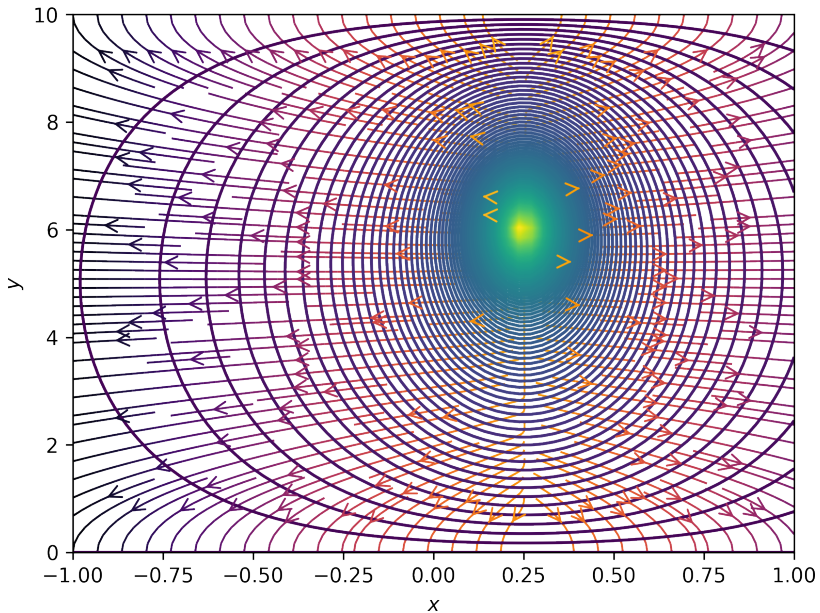
- Damit:

$$\phi_{\pm}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{d}|x-x_0|} \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right)$$

- Mit $-\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \phi_{+}}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{-}}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = q\delta(y - y_0) = \sigma(y)$ und der Orthonormalitätsbeziehung:

$$A_n = \frac{q}{\varepsilon_0 \pi} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{d}y_0\right)}{n}$$

$$\phi(x, y) = \frac{q}{\varepsilon_0 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{d}y_0\right) \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right) e^{-\frac{n\pi}{d}|x-x_0|} \quad \vec{E} = -\text{grad } \phi$$



Geladene Kugelfläche

- Problem: Potential einer geladene Kugelfläche mit Radius R und **rotationssymmetrischer** Ladungsverteilung

$$\rho_V(\vec{r}) = \rho_V(r, \vartheta, \varphi) = \rho_F(\vartheta)\delta(r - R) = \sigma(\vartheta)\delta(r - R)$$

- Idee: Unterteilung in „innen“ und „außen“; $\sigma \rightarrow$ Neumann Randbedingung bei R .
- Potential (\rightarrow Elektrostatik-VI: Orthogonale Funktionensysteme):

$$\begin{aligned}\phi(r, \vartheta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \underbrace{c_{lm} R_l(r)}_{R_{lm}(r) = c_{lm}(A r^l + B r^{-(l+1)})} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \text{ mit} \\ Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{jm\varphi}\end{aligned}$$

- Problem ist **rotationssymmetrisch** bezüglich $\varphi \rightarrow$ Lösung kann nicht von φ abhängen $\rightarrow m = 0$:

$$\begin{aligned}\phi(r, \vartheta, \varphi) = \phi(r, \vartheta) &= \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) Y_{l0}(\vartheta, \varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \underbrace{P_{l0}(\cos \vartheta)}_{P_l(\cos \vartheta)} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \vartheta)\end{aligned}$$

- Dabei sind $P_{l0}(x) = P_l(x)$ die **Legendre-Polynome**:

$$P_{l0}(x) = P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \text{ voll. System auf } [-1, 1]$$

- Orthogonalitätsrelation der Legendre Polynome:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}$$

- Da die Legendre-Polynome ein vollständiges System auf $[-1, 1]$ (bezüglich $\cos \vartheta$ also $[0, \pi]$) sind, kann auch die Oberflächenladungsdichte nach diesen entwickelt werden:

$$\sigma(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_l P_l(\cos \vartheta)$$

- Multiplikation mit P_m , Integration und Nutzung der Orthogonalitätsrelation liefert:

$$\sigma_l = \int_{-1}^1 \sigma(\vartheta) P_l(\cos \vartheta) d \cos \vartheta$$

- Offensichtlich sollte das Potential aufgeteilt werden in

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r, \vartheta) = \begin{cases} \phi_-(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l^- r^l + B_l^- r^{-(l+1)}) \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \vartheta) & \text{für } r < R \\ \phi_+(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l^+ r^l + B_l^+ r^{-(l+1)}) \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \vartheta) & \text{für } r > R \end{cases}$$

- Keine Ladung im Ursprung \rightarrow keine Singularität von $\phi_-(r \rightarrow 0) \Rightarrow B_1^- = 0$
- Potential verschwindet im Unendlichen $\phi_+(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow A_1^+ = 0$
- Stetigkeit bei $r = R$: $A_1^- r^1 \Big|_{r=R} = B_1^+ r^{-(1+1)} \Big|_{r=R} \Rightarrow B_1^+ = A_1^- R^{2l+1}$

- Nutzung der Neumann Randbedingung:

$$\begin{aligned}\sigma(\vartheta) &= -\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \phi_+}{\partial r} - \frac{\partial \phi_-}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} \\ &= -\varepsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} \left(-(l+1) A_l^- R^{2l+1} r^{-(l+2)} - l A_l^- r^{l-1} \right) \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \vartheta) \Big|_{r=R} \\ &= \varepsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)^2}{2} A_l^- R^{l-1} P_l(\cos \vartheta)\end{aligned}$$

- Andererseits gilt die Entwicklung: $\sigma(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_l P_l(\cos \vartheta)$, also:

$$\varepsilon_0 (2l+1) A_l^- R^{l-1} = \sigma_l \Rightarrow A_l^- = \frac{1}{(2l+1)\varepsilon_0} \sigma_l R^{-(l-1)}$$

- Damit ist die Gesamtlösung gefunden:

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r, \vartheta) = \begin{cases} \phi_-(r, \vartheta) &= \frac{R}{\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sigma_l}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^l P_l(\cos \vartheta) \text{ für } r < R \\ \phi_+(r, \vartheta) &= \frac{R}{\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sigma_l}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} P_l(\cos \vartheta) \text{ für } r > R \end{cases}$$

Einfachster Fall: homogen geladene Kugel

- homogene Kugel: $\sigma(\vartheta) = \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$
- Entwicklung von $\sigma(\vartheta)$: $\sigma(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_1 P_l(\cos(\vartheta))$:

$$\frac{Q}{4\pi R^2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_1 P_l(\cos(\vartheta)) \stackrel{l=0}{=} \frac{\sigma_0}{2}$$
$$\sigma_0 = \frac{2Q}{4\pi R^2}$$

- Damit Potentiale und Felder:

$$\phi_-(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\vec{E}_-(r) = \vec{0}$$

$$\phi_+(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E}_+(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektrostatik-VIII: Materie

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



mikroskopische vs makroskopische Betrachtung

- Die Maxwellgleichungen für das Vakuum gelten zunächst auch **unverändert** in Materie
- Denn: Materie ist auch nur „Nichts“ plus „Elementarteilchen“ (Protonen, Neutronen, Elektronen).
- Beispiel
 - Das dichteste Element ist **Osmium** (Os): OZ: 76, Dichte: $22.6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, Atommasse: 190.23 u
 - 8.4 cm^3 entspricht 1 Mol Osmium
 - Mit den Radien von Elektron ($\approx 10^{-19} \text{ m}$), Proton und Neutron (jeweils $\approx 10^{-15} \text{ m}$) rechnet man aus, dass 1 Mol Osmium etwa $0.5 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^3$ Materie enthält.
 - Oder anders ausgedrückt: In 16.8 (hm)^3 ist 1 cm^3 Materie
- Man könnte mit den Maxwell-Gleichungen des Vakuums rechnen, müsste dann aber über alle Ladungen superponieren und dabei die Orte und Ortsveränderung aller Ladungen immer berücksichtigen.
- Die Informationen hierzu sind erstens gar nicht einfach verfügbar und zweitens sind die dann berechenbaren Details gar nicht beobachtbar
- Deshalb: Übergang zu **makroskopischen Betrachtungen**

Ladungsdichte und Polarisation von „Teilchen“

- Größere Ladungsansammlungen (Atome, Ionen, Moleküle, ...) können als Ladunganhäufungen („Teilchen“) betrachtet werden, zwischen denen fast nichts ist.
- Befinden sich im k-ten „Teilchen“ die Ladungen q_i^k (gebunden oder frei) an den Orten $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, so ist die **Ladungsdichte im Bereich des k-ten Teilchens** in guter Näherung

$$\rho^k(\vec{r}, t) = \sum_i q_i^k \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \quad \xrightarrow{\text{Mittelung}} \quad \boxed{\rho^k(\vec{r}) = \sum_i q_i^k \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i)}$$

- Ist $\vec{R}^k = \vec{R}^k(t)$ der **Ladungsschwerpunkt** des k-ten Teilchens, so ergibt sich das **Dipolmoment** zu:

$$\vec{p}^k(t) = \int_{V^k} \rho^k(\vec{r}, t) (\vec{r} - \vec{R}^k(t)) d^3r \quad \xrightarrow{\text{Mittelung}} \quad \boxed{\vec{p}^k = \int_{V^k} \rho^k(\vec{r}) (\vec{r} - \vec{R}^k) d^3r}$$

Effektive Ladungsdichte, Dipolmoment und Potential

- Abstände innerhalb der „Teilchen“ sind in aller Regel sehr klein im Vergleich zum Abstand zwischen Ladungsschwerpunkt und Beobachtungspunkt:
 $|\vec{r}^k - \vec{R}^k| \ll |\vec{r} - \vec{R}^k|$ für $\vec{r}^k \in V^k$

- **Skalarpotential des k-ten Teilchens:** Multipolentwicklung nach Dipolterm abbrechen:

$$\phi^k(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q^k}{|\vec{r} - \vec{R}^k|} + \frac{\vec{p}^k \cdot (\vec{r} - \vec{R}^k)}{|\vec{r} - \vec{R}^k|^3} \right]$$

- Für N „Teilchen“ ergeben sich dann **effektive** Ladungsdichte, Dipoldichte und Potential in der Form

$$\rho_{\text{eff}}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N q^k \delta(\vec{r} - \vec{R}^k) \quad \text{mit Gesamtladung } q^k$$

$$\vec{p}_{\text{eff}}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \vec{p}^k \delta(\vec{r} - \vec{R}^k) \quad \text{mit Gesamtdipolmoment } \vec{p}^k$$

$$\phi_{\text{eff}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\frac{\rho_{\text{eff}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{p}_{\text{eff}}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] d^3r'$$

Makroskopische Ladungsdichte, Polarisation und Potential

- Aus den effektiven Größen ergeben sich die **makroskopischen** Größen durch Mittelung.
- **Makroskopische Ladungsdichte** $\rho_V(\vec{r}) = \overline{\rho_{\text{eff}}(\vec{r})}$ → alle Ladungen berücksichtigt, aber die meisten kompensieren sich in ihrer Wirkung
- **Makroskopische Polarisation** $\vec{P}(\vec{r}) = \overline{\vec{p}_{\text{eff}}(\vec{r})}$ → **Modelle** werden benötigt, um die makroskopische Polarisation als Antwort auf interne und externe Felder vorherzusagen
- Das **makroskopische Skalarpotential** ist dann

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) = \overline{\phi_{\text{eff}}(\vec{r})} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d^3r'\end{aligned}$$

Dielektrische Verschiebung

- Makroskopische Skalarpotential:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d^3r'$$

- Wir berechnen $\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \text{div}(-\text{grad } \phi(\vec{r})) = -\Delta_r \phi(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\rho_V(\vec{r}') \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')} \right] d^3r' \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left[\rho_V(\vec{r}) + \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \underbrace{\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')}_{-\nabla\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')} d^3r' \right] = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\rho_V(\vec{r}) - \underbrace{\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})}_{\text{div } \vec{P}(\vec{r})} \right] \end{aligned}$$

- Hieraus folgt das makroskopische Äquivalent des Coulomb-Gauss-Gesetzes in Materie mit der **Dielektrischen Verschiebung** $\vec{D}(\vec{r})$:

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})) = \boxed{\text{div } \vec{D}(\vec{r}) = \rho_V(\vec{r})} \quad \text{mit} \quad \boxed{\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})}$$

Maxwell Gleichungen und Stetigkeitsbedingungen

- Grundgleichungen der Elektrostatik

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= \vec{0} & \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_V & \oiint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \iiint_V \rho_V dV \end{aligned}$$

- Stetigkeitsbedingungen (\vec{n} Normalenvektor von Volumen 1 \rightarrow zeigt von 1 nach 2):

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= D_2^n - D_1^n = \rho_F \\ \vec{t} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= E_2^t - E_1^t = 0 \quad \forall \vec{t} \text{ mit } \vec{t} \perp \vec{n} \end{aligned}$$

Typen von Dielektrika

- **gewöhnliche Dielektrika:**
 - Keine internen Dipolmomente ohne äußeres Feld
 - Äußeres Feld verschiebt Ladungen in den „Teilchen“ und erzeugt damit eine Polarisation
 - → **Deformationspolarisation**
- **Paraelektrika:**
 - Es gibt permanente interne Dipole (z.B. Wasser) auch ohne äußeres Feld
 - Durch die thermische Unordnung ergibt sich keine makroskopische Polarisation
 - Ein äußeres Feld führt zu einer (temperaturabhängigen) makroskopischen Polarisation
 - → **Orientierungspolarisation**
- **Ferroelektrika:**
 - Es gibt permanente interne Dipole auch ohne äußeres Feld
 - Unterhalb einer kritischen Temperatur (Curie-Temperatur) richten sich die internen Dipole **spontan** zueinander aus (z.B. Bariumtitanat)
 - Oberhalb der kritischen Temperatur erscheinen sie paraelektrisch
 - Im ferroelektrischen Bereich kann die Richtung der spontanen Polarisation durch ein äußeres Feld umgekehrt werden → **Hysterese** von P vs E
 - Ferroelektrische Stoffe zeigen **pyroelektrische** und **piezoelektrische** Effekte

Gewöhnliche Dielektrika und Paraelektrika

- Die Polarisation hängt von E-Feld ab: $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ mit $\vec{P}(\vec{E} = \vec{0}) = \vec{0}$
- Entwicklung nach Potenzen von E (P_i : i-te Komponente; Summenkonvention):

$$P_i = \gamma_{ij} E_j + \beta_{ijk} E_j E_k + \dots$$

- Die Tensoren γ_{ij} , β_{ijk} , ... sind **Materialkonstanten**
- **lineares Dielektrikum**: $P_i = \gamma_{ij} E_j$ ist ausreichend gute Näherung
- **isotropes Dielektrikum**: $P_i = \gamma_{ij} E_j + \beta_{ijk} E_j E_k + \dots = \gamma E_i + \beta E_i^2 + \dots$
richtungsunabhängig
- Für lineare und isotrope Dielektrika definiert man die **elektrische Suszeptibilität** χ_e :

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

- Somit folgt dann für die Dielektrische Verschiebung:

$$\vec{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

- Die Größe $\epsilon_r = (1 + \chi_e)$ ist die **relative Dielektrizitätskonstante**.

Atomare Polarisierbarkeit - Clausius-Mosotti-Gleichung

- Die lokale Antwort der Materie auf das tatsächliche lokale elektrische Feld kann nur sehr aufwendig ermittelt werden
 - Festkörperphysikalische Modelle
 - Quantenmechanische Rechnungen
 - Numerische Berechnung (prinzipiell)
- Modelle liefern dann die **atomare/molekulare Polarisierbarkeit** α .
- Verknüpfung zwischen atomaren und makroskopischen Größen liefert die **Clausius-Mosotti-Gleichung** (ohne Herleitung):

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{n} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad \text{mit } n = \frac{N_A \rho}{M_m}$$

wobei N_A die **Avogadrokonstante**, ρ die **Dichte** und M_m die **molare Masse** ist.

Elektrostatische Energie und Energiedichte

- Wir hatten die elektrostatische Energie bereits für das **Vakuum** berechnet:

$$W_e = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\int \operatorname{div}(\phi \operatorname{grad} \phi) d^3r - \int (\operatorname{grad} \phi)^2 d^3r \right) = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\operatorname{grad} \phi)^2 d^3r$$
$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 d^3r \quad \text{Energiedichte: } \boxed{w_e = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2}$$

- Eine ganz analoge Herleitung ergibt das **verallgemeinerte Resultat**:

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d^3r} \quad \text{Energiedichte: } \boxed{w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}}$$

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Stationäres Elektrisches Strömungsfeld

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Ausgangspunkt Elektrostatik

- Maxwell-Gleichungen:

$$\text{rot } \vec{E} = - \underbrace{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{= \vec{0}} = \vec{0}$$
$$\text{div } \vec{D} = \rho_V$$

- Elektrostatik → ruhenden Ladungen → elektrostatisches Feld
- Jetzt: Bewegung von Ladungen zugelassen
- Allerdings Beschränkung auf stationäre Bewegung:

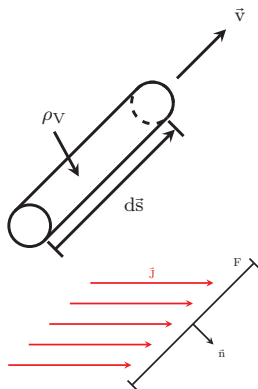
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_V = 0$$

- Es existiert somit eine Stromdichte $\vec{J} \neq \vec{0}$.

Stromdichte

- Grundsätzlich sind zwei Arten der Bewegung von Ladungsträgern zu betrachten:
 - Thermische Bewegung \vec{v}_{th} : Trägt makroskopisch nicht zur Stromdichte \vec{J} bei, da $\langle \vec{v}_{th} \rangle = \vec{0}$.
 - Driftbewegung \vec{v}_D : Trägt zur Stromdichte \vec{J} bei, da für den Mittelwert der Driftgeschwindigkeit $\langle \vec{v}_D \rangle \neq \vec{0}$ gilt.
- Die Driftbewegung muss von einer Kraft getrieben werden.
- aus dem elektrischen Feld: $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$
- aus dem magnetischen Feld: $\vec{F}_H = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow$ in der Regel sehr klein

Strom



- Für einen Leiter gilt

$$\vec{J} = \rho_V \cdot \vec{v},$$

mit

$$[\rho_V] = \text{A s m}^{-3}, \quad [v] = \text{m s}^{-1}, \quad [J] = \text{A m}^{-2}$$

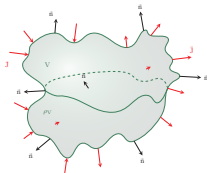
- Der Gesamtstrom durch die Fläche \vec{F} berechnet sich nach

$$I = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{F} = \iint_F \vec{J} \cdot \vec{n} dF = \iint_F J^n dF$$

mit

$$J^n = \vec{J} \cdot \vec{n}.$$

Ladungserhaltung - Kontinuitätsgleichung



- Axiomatische Grundlagen: **Ladungserhaltung**
- Nettostrom durch eine geschlossene Oberfläche \neq Null \rightarrow Ladungsdichte des Volumens zeitabhängig

$$\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \neq 0.$$

- Es muss gelten (wg. Ladungserhaltung)

$$\oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{F} = - \iiint_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV \rightarrow \iiint_V \operatorname{div} \vec{J} dV = - \iiint_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV$$

- Das liefert die **Kontinuitätsgleichung**

$$\operatorname{div} \vec{J} = - \frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$

Kontinuitätsgleichung

- Alternative Herleitung über die Maxwell-Gleichungen → Axiomatische Grundlagen

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = \operatorname{div} \vec{J} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- Mit $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V$:

$$0 = \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$

- In einem stationären Strömungsfeld gilt definitionsgemäß

$$\frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0 \rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{J} = 0}$$

- Die integrale Form entspricht dem **Kirchhoffschen Knotensatz**:

$$\oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{F} = 0$$

Ohmsches Gesetz

- Lorentzkraft: $\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
- Aus der Bewegungsgleichung

$$m \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = q \vec{E} \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{q}{m} \cdot \vec{E} \cdot t$$

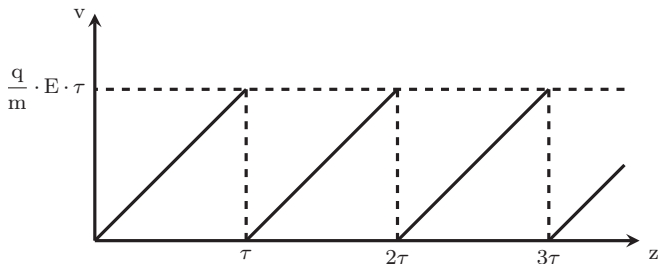
- Für $\vec{E} = \text{const.}$ folgt $\vec{v} \sim t$ und $\vec{J} \sim t$
- Der experimentelle Befund ist

$$U = R \cdot I \text{ mit } U \sim E \text{ und } I \sim J$$

- Das ergibt $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$ \rightarrow Leitfähigkeit κ mit $[\kappa] = \text{m}/(\Omega \text{m}^2) = \text{S m m}^{-2}$
- 1. Frage: Warum ist das elektrische Feld im Leiter nicht Null?
 - Für stationäre Ladungen, $\vec{J} = \vec{0}$, gilt tatsächlich $\vec{E} = \vec{0}$
 - Für perfekte Leiter ($\kappa \rightarrow \infty$) gilt $\vec{E} = \vec{0}$ auch für $\vec{J} \neq \vec{0}$
 - Für einen guten Leiter ($\kappa < \infty$) ist ein kleines elektrisches Feld notwendig um $\vec{J} = \text{const.}$ zu halten. ($I = 1 \text{ A}$; $A = 1 \text{ mm}^2$; $\kappa = 60 \cdot 10^6 \text{ A}/(\text{Vm}) \rightarrow E = 1.7 \cdot 10^{-14} \text{ V/m}$)

Modell der Leitfähigkeit

- 2. Frage: Warum ist bei $\vec{E} = \text{const.}$ auch $\vec{J} = \text{const.}$, d.h. $\vec{v} = \text{const.}$?
 - Etwas hemmt die Bewegung
 - ineleastische Stöße mit den Atomrümpfen
- Gitterkonstante $l_F \approx 1 \text{ nm} \rightarrow$ Stoßzeit $\tau = \frac{l_F}{\langle v \rangle}$



- Mittelwert der Geschwindigkeit: $\langle v \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot E \cdot \tau \rightarrow \langle v \rangle = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot E \cdot l_F}$
- **Widerspruch** zu $\langle v \rangle \sim E \rightarrow$ **Drude Modell**

Drude Modell

- Tatsächlich: Nicht freie Weglänge ist maßgeblich sondern die **thermische Bewegung**: $|\vec{v}_{th}| \gg |\vec{v}_D| \rightarrow \tau = \frac{l_F}{v_{th}}$

$$|\vec{v}_D| = \langle |\vec{v}_D| \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot E \cdot \frac{l_F}{|\vec{v}_{th}|}$$

- Damit und mit der Anzahldichte der Ladungen n :

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \rho_V \cdot \vec{v}_D = n \cdot q \cdot \vec{v}_D \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot q^2 \cdot l_F}{m \cdot |\vec{v}_{th}|} \cdot \vec{E} = \kappa \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot q^2 \cdot l_F}{m \cdot |\vec{v}_{th}|}$$

- kinetische Energie/thermische Energie: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{th}^2 = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T$
- Elektronen bei Raumtemperatur: $v_{th} = 1 \times 10^5 \text{ m s}^{-1} = 100 \text{ km s}^{-1}$
- mit Gitterkonstante $l_F = 1 \text{ nm} \rightarrow$ Stoßzeit: $\tau = 1 \times 10^{-14} \text{ s}$

Widerstand und Leistung

- Annahme: Stromdichte konstant über den Leiterquerschnitt (dünne Leiter)
- Leiterquerschnittsfläche F , Leiterlänge l :

$$I = J \cdot F = \kappa E F = \frac{\kappa F}{l} E l = \frac{\kappa F}{l} U$$

$$I = \frac{1}{R} U \rightarrow$$

$$R = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{F} \quad \text{ohmscher Widerstand}$$

- Leistung: Verschiebung eines Quaders, Ladung ΔQ , Querschnitt ΔF , Länge und Versatz $\Delta \vec{s}$:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta Q \vec{E} \cdot \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \rho_V \Delta F \Delta s \vec{E} \cdot \vec{v}_D = \vec{J} \cdot \vec{E} \Delta F \Delta s = \frac{1}{\kappa} |\vec{J}|^2 \Delta F \Delta s$$

- Verlustleistungsdichte:

$$p_V = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{P}{\Delta V} = \frac{1}{\kappa} \cdot \vec{J}^2 = \vec{E} \cdot \vec{J}$$

- **Joulesches Gesetz** für dünne Leiter:

$$P = R \cdot I^2 = U \cdot I$$

Elektromotorische Kraft (EMK) - Ursprung

- Im stationären Fall hat das Induktionsgesetz die einfache Form $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$
- Mit $\vec{E} = \kappa^{-1} \cdot \vec{J}$ folgt für jeden beliebigen geschlossenen Weg

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \vec{J} \right) = \vec{0} \rightarrow \oint_C \frac{1}{\kappa} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \vec{J} = \vec{0} ??$$

- Eine stationäre Stromdichte $\vec{J} \neq \vec{0}$ erfordert eine (nichtelektrische) **Energiequelle**.
- 2 Kräfte
 1. Die **elektrostatische Kraft** $q\vec{E}$ sorgt für $\vec{J} = \text{const.}$ in sehr kurzer Zeit.
 2. Kräfte von **Quellen** (z.B. Batterie, Photozelle, Piezozelle, Piezokristall, Induktion, äußeres Feld, usw.), welche sowohl verteilt, als auch konzentriert sein können. \rightarrow **eingepprägten elektrische Feldstärke** \vec{E}_E

$$\oint_C \vec{E}_E \cdot d\vec{s} = U \neq 0 \text{ EMK, Ursprung}$$

- Für die Stromdichte folgt

$$\vec{J} = \kappa \cdot (\vec{E} + \vec{E}_E) = \underbrace{\kappa \cdot \vec{E}}_{\text{außerhalb der Quelle}} \rightarrow \oint_C \vec{J} \cdot d\vec{s} = \kappa \cdot \underbrace{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{=0} + \kappa \cdot \oint_C \vec{E}_E \cdot d\vec{s} = \kappa \cdot U \neq 0$$

Relaxationszeit

- Einerseits Maxwell: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon_0} \rightarrow \operatorname{div} \vec{J} = \frac{\kappa \cdot \rho_V}{\epsilon_0} \neq 0$
- Andererseits Stationarität: $\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$ (Widerspruch?)
- Differentialgleichung für die Volumenladungsdichte ρ_V

$$\dot{\rho}_V + \frac{\kappa}{\epsilon_0} \cdot \rho_V = 0$$

- Lösung: $\rho_V(t) = \rho_{V0} \cdot e^{-\kappa/\epsilon_0 \cdot t}$
- Für Kupfer: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$ und $\kappa_{\text{Cu}} = 58 \times 10^6 \text{ S m}^{-1} \rightarrow$
Zeitkonstante zur Erreichung des Gleichgewichtes:

$$\tau_{\text{Cu}} = \frac{\epsilon_0}{\kappa_{\text{Cu}}} \cong 1.5 \times 10^{-19} \text{ s}$$

Vergleich mit Elektrostatik

Elektrostatik

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = -\varepsilon \cdot \text{grad } \phi$$

im Ladungsfreien Raum

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

homogenen Raum
($\varepsilon = \text{const.}$, $\kappa = \text{const.}$)

$$\Delta \phi = 0$$

$$D_2^n - D_1^n = 0$$

$$\frac{D_2^t}{\tan \alpha_1} = \frac{D_1^t}{\tan \alpha_2}$$
$$\frac{\varepsilon_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\varepsilon_1}{\tan \alpha_2}$$

stat. el. Strömungsfeld

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

$$\vec{J} = -\kappa \cdot \text{grad } \phi$$

im stationären Fall

$$\text{div } \vec{J} = 0 \left(= -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \right)$$

$$J_2^n - J_1^n = 0$$

$$\frac{J_2^t}{\tan \alpha_1} = \frac{J_1^t}{\tan \alpha_2}$$
$$\frac{\kappa_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\kappa_1}{\tan \alpha_2}$$

→ Lösungsmethoden können übernommen werden!

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Magnetostatik I - Grundlagen

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Ausgangspunkt Magnetostatik

- Die Magnetostatik betrachtet **zeitunabhängige** magnetische Felder soweit diese durch **Gleichströme** verursacht werden.
- Konstante magnetische Felder durch permanentmagnetische Stoffen spielen in der Regel keine Rolle.
- Wesentlicher Unterschied zur Elektrostatik ist, dass es **keine magnetischen Monopole** gibt (jedenfalls keine, die nicht immer paarweise auftreten → **Spineis**); führender Term ist also der Dipolterm.
- Grundgleichungen:

allgemein	Elektrostatik	Stationäres Strömungsfeld	Magnetostatik
$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$		$(\text{rot } \vec{H} = \vec{J})$	$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J}}$
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$	$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$	
$\text{div } \vec{B} = 0$			$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$
$\text{div } \vec{D} = \rho_V$	$\text{div } \vec{D} = \rho_V$		
$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0$		$\text{div } \vec{J} = 0$	$(\text{div } \vec{J} = 0)$

Grundgleichungen der Magnetostatik

- Maxwell-Gleichungen:

differentielle Form

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

integrale Form

$$\oint_{C(A)} \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\oiint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

- Materialgleichung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 M_r(\vec{r}, \vec{H}, T, \dots) \vec{H}(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r})}$$

- In der Elektrostatik folgte aus $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$, dass das elektrische Feld ein Gradientenfeld ist: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$
- Das ist in der Magnetostatik wegen $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \neq \vec{0}$ nicht der Fall.
- Aber: $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B}$ ist **quellenfrei**

Das magnetische Vektorpotential

- Aus $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ und $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$ folgt, dass \vec{B} immer als **Rotation eines Vektorfeldes** dargestellt werden kann. Siehe auch: **Helmholtz-Theorem** bzw. **Fundamentalsatz der Vektoranalysis**
- Dieses Feld \vec{A} ist das **magnetische Vektorpotential**:

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}} \quad [\vec{A}] = \text{V s m}^{-1}$$

- Vorteil: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ automatisch erfüllt
- lineares, isotropes Medium: $\vec{B} = \mu(\vec{r})\vec{H}$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu(\vec{r})} \vec{B} \right) = \boxed{\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu(\vec{r})} \operatorname{rot} \vec{A} \right) = \vec{J}(\vec{r})}$$

lineares, isotropes und homogenes Medium: $\mu(\vec{r}) = \mu$

$$\mu \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \boxed{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J}(\vec{r})}$$

Eichtransformation

- Wegen $\text{rot grad } \psi = \vec{0}$:

$$\vec{B}' = \text{rot} \underbrace{(\vec{A} + \text{grad } \psi)}_{\vec{A}'} = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}$$

- Das Vektorpotential ist bestimmt nur bis auf einen Summanden $\text{grad } \psi$.
- Anwendung auf $\text{rot rot } \vec{A} = \mu \vec{J}$:

$$\text{rot rot } \vec{A}' = \text{rot rot } \vec{A} = \mu \vec{J}(\vec{r})$$

- Übergang $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi$: **Eichtransformation** $\rightarrow \vec{B}' = \vec{B}$ ist **eichinvariant**
- Für die Divergenz gilt:

$$\text{div } \vec{A}' = \text{div} (\vec{A} + \text{grad } \psi) = \text{div } \vec{A} + \underbrace{\text{div grad } \psi}_{\neq 0}$$

- In $\boxed{\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J}(\vec{r})}$ kann $\text{div } \vec{A}$ **beliebig** gewählt werden.

Coulomb-Eichung

- Für statische Probleme ist die **Coulomb-Eichung** gut geeignet:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0} \quad \implies \quad \boxed{\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}(\vec{r})}$$

- **Achtung:** Der Laplace-Operator Δ für Vektorfelder muss im allgemeinen Fall (krümmelige Koordinaten) aus der Beziehung $\Delta \cdot = \operatorname{grad} \operatorname{div} \cdot - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \cdot$ ausgerechnet werden.
- Hierbei „vermischen“ sich die Komponenten wegen der Ortsabhängigkeit der Einheitsvektoren.
- **Nur für kartesische Koordinaten** zerfällt die vektorielle Poissongleichung „einfach“ in drei skalare Poissongleichungen:

$$\Delta A_x = -\mu J_x$$

$$\Delta A_y = -\mu J_y$$

$$\Delta A_z = -\mu J_z \text{ mit}$$

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

$$\vec{J} = J_x \vec{e}_x + J_y \vec{e}_y + J_z \vec{e}_z$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ (skalärer Laplace-Operator)}$$

Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

– Z.B. in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta A_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_\rho}{\rho^2} &= -\mu J_\rho \\ \Delta A_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} &= -\mu J_\varphi \\ \Delta A_z &= -\mu J_z\end{aligned}$$

mit

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{skalärer Laplace-Operator})$$

Lösung für das Vektorpotential

- Für den Fall **kartesischer Koordinaten** ergeben sich drei Poisson-Gleichungen (offensichtlich nicht für Zylinderkoordinaten) → **Lösungsmethoden anwendbar!**
- Analog zum Coulomb-Integral ergibt sich

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_z(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

- Dies lässt sich wieder **koordinatenfrei** schreiben:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

- Für einen **Stromfaden** folgt der Spezialfall

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{I}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \text{ entlang des Stromfadens}$$

Gesetz von Biot-Savart

- Mit $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ und $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$ folgt $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \text{rot}_r \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$
- Man berechnet

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{rot}_r \vec{J}(\vec{r}') - \vec{J}(\vec{r}') \times \text{grad}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\vec{J}(\vec{r}') \times \text{grad}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\vec{J}(\vec{r}') \times \left(-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

- Damit folgt das das allgemeine **Biot-Savart-Gesetz**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

- Für Stromfäden folgt

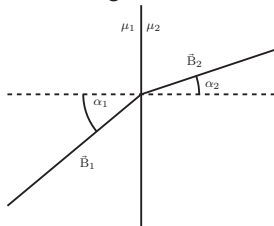
$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} I \oint_C \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{und} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} I \oint_C \frac{d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Stetigkeitsbedingung an Grenzflächen

- Die Stetigkeitsbedingungen wurden im Teil „Verhalten am Grenzflächen“ bereits allgemein hergeleitet.
- Es gilt (Normalenvektor von 1 nach 2):

$$\begin{aligned}\vec{B}_2 \cdot \vec{n} - \vec{B}_1 \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{H}_2 \cdot \vec{t} - \vec{H}_1 \cdot \vec{t} &= \vec{J}_F \cdot \vec{t}_2 \\ \vec{t}_2 &= \vec{n} \times \vec{t}\end{aligned}$$

- Hiermit folgt auch das Brechungsgesetz für $\vec{J}_F = \vec{0}$



$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Energie im magnetostatischen Feld

- Analog zur Elektrostatik erhält man für die **magnetische Energiedichte**

$$w_m = \frac{1}{2} \cdot \vec{H} \cdot \vec{B}$$

- Für die gesamte **magnetische Energie**

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV$$

- Ausdrücken mit Hilfe der elektrischen Stromdichte \vec{J} (lineare, homogene und isotrope Medien):

$$W_m = \frac{1}{2\mu} \cdot \iiint_V \vec{B}^2 dV$$

- Weiter:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \underbrace{\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A}}_{\vec{B}} - \underbrace{\vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}}_{\mu \vec{J}} \\ &= \vec{B}^2 - \mu \vec{A} \cdot \vec{J} \end{aligned}$$

Energie im magnetostatischen Feld (fortgesetzt)

– Daraus:

$$\begin{aligned}W_m &= \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J} \, dV + \frac{1}{2\mu} \cdot \iiint_V \operatorname{div} (\vec{A} \times \vec{B}) \, dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J} \, dV + \frac{1}{2\mu} \oint_{O(V)} \vec{A} \times \vec{B} \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

- **Endlich ausgedehnte Stromverteilung:** Aus Biot-Savart folgt $|\vec{B}| \sim r^{-2}$ für $r \rightarrow \infty$.
Weiter: $|\vec{A}| \sim r^{-1} \rightarrow \vec{A} \times \vec{B} \sim r^{-3}$. Das Oberflächenintegral fällt daher weg. Damit:

$$\begin{aligned}W_m &= \frac{1}{2} \cdot \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J} \, dV \\ w_m &= \frac{1}{2} \cdot \vec{A} \cdot \vec{J}\end{aligned}$$

Induktivität

- In Schleife 1 fließt der Strom I_1 : Nach Biot-Savart gilt

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_1) \times d\vec{s}_1}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|^3}$$

- Der magnetische Fluss $\phi_{m,2}$ durch Schleife 2:

$$\phi_{m,2} = \iint_{A_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2, \quad |\vec{B}_1| = B_1 \sim I_1$$

- Es gilt also $\phi_{m,2} = M_{21} I_1$, M_{21} : Gegeninduktivität, mit $[M] = \text{Vs A}^{-1} = \text{H}$

Berechnung des Flusses (\vec{r}'_2 liegt auf C_2):

$$\phi_{m,2} = \iint_{A_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2 = \iint_{A_2} \text{rot } \vec{A}_1 \cdot d\vec{A}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{s}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1}{|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|} \cdot d\vec{s}_2$$

Induktivität (fortgesetzt)

– → Gegeninduktivität:
$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|}$$
 Neumann Formel

- Neumann-Formel ist nicht besonders nützlich zur Berechnung von M_{21} . Aber:
1. $M_{21} = M_{12} = M$ und
 2. M_{21} ist eine rein geometrische Größe
- Wenn $C_1 = C_2$, dann ist die Neumann-Formel so nicht anwendbar. Deshalb zurück zur Definition der Gegeninduktivität:

$$\phi_{m,1} = M_{11} \cdot I_1 \rightarrow \boxed{\phi_m = L \cdot I} \text{ Selbstinduktivität } L$$

- Es gilt somit für eine Leiterschleife

$$\phi_m = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} \stackrel{!}{=} LI \rightarrow \boxed{L = \frac{1}{I} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}}$$

- Verbindung mit der magnetischen Energie

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV = \frac{1}{2} I \underbrace{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}}_{=LI} = \frac{1}{2} LI^2$$

Magnetisches Moment

- Wir untersuchen das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

für den Fall „großer Abstand von lokal beschränkter Stromdichte“ →

Multipolentwicklung mit $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots$

$$- \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') dV' + \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r^3} \iiint_V \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{J}(\vec{r}') dV' + \dots$$

- Ohne Beweis: Der Monopolterm verschwindet. Damit:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r^3} \iiint_V \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{J}(\vec{r}') dV' + \dots = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{2} \underbrace{\iiint_V \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV'}_{\vec{m}(\vec{r})} \times \frac{\vec{r}}{r^3} + \dots$$

- Mit dem **magnetischem Moment** \vec{m} ist das Vektorpotential somit

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{m}(\vec{r}) \times \vec{r}}{r^3} + \dots} \rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m}(\vec{r}))\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}(\vec{r})}{r^3} \right] + \dots}$$

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Magnetostatik II - Materie

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Mikroskopische vs makroskopische Betrachtung

- Wie bereits in „Elektrostatik VIII - Materie“ diskutiert und erläutert: Die Maxwell-Gleichungen des Vakuums gelten auch in Materie.
- Allerdings müssten dann die **Bewegungen aller Ladungsträger** betrachtet werden, die aber nur zu einem Bruchteil zu einer **makroskopischen Stromdichte** beiträgt. → Makroskopische Betrachtung im Sinne von Mittelwerten.
- Analog zur elektrischen Flussdichte \vec{D} mit $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ folgt für das Magnetfeld in Materie unter Einführung der **Magnetisierung** \vec{M}

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

- In der Maxwellgleichung $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ ist \vec{J} als **makroskopisch gemittelte Stromdichte** zu verstehen.
- Für ein **lineares, isotropes und homogenes Medium** kann mit Hilfe der **magnetischen Suszeptibilität** χ_m gilt für die Magnetisierung: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
- Damit folgt für die magnetische Permeabilität: $\mu_r = 1 + \chi_m$
- Somit ergibt sich für die magnetische Induktion: $\vec{B} = (1 + \chi_m) \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

Einteilung der magnetischen Materie

– Diamagnetismus:

- Diamagnetismus ist eine Eigenschaft **aller Stoffe**, kann aber von anderen Eigenschaften überlagert werden.
- Keine permanente interne magnetische Dipole.
- Induzierte Magnetisierung im äußeren Feld → wirkt seiner Ursache entgegen
- Es gilt $\chi_m < 0$ und $|\chi_m| \approx 10^{-5}$
- Spezialfall **Supraleiter** → Meißner-Ochsenfeld-Effekt (komplette Feldverdrängung) $\chi_m = -1$ perfekter Diamagnetismus

– Paramagnetismus:

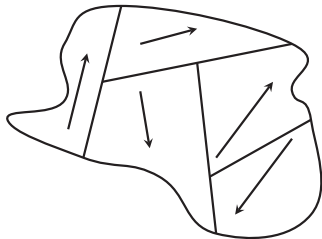
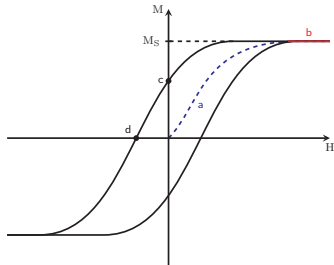
- Es gibt **permanente interne magnetische Dipole**, die sich im äußeren Feld orientieren können.
- Die thermische Bewegung wirkt der Ordnung entgegen.
- Daher gilt allgemein: $\chi_m > 0$ und $\chi_m = \chi_m(T)$
- Je nach Ursache des Paramagnetismus (gebundene Elektronen vs. freie Leitungselektronen) ist die magnetische Suszeptibilität entweder **temperaturabhängig** (gebundene Elektronen) oder (fast) **temperaturunabhängig** (Leitungselektronen → **Pauli-Paramagnetismus**).
- Im Falle der Temperaturabhängigkeit gilt (zumindest bei ausreichend hohen Temperaturen) das **Curie-Gesetz** $\chi_m(T) = \frac{C}{T}$

Einteilung der magnetischen Materie (fortgesetzt)

- **Kollektiver Magnetismus** → Ferro-, Ferri-, Antiferromagnetismus
 - Es gibt **permanente interne magnetische Dipole**, die sich im äußeren Feld orientieren können.
 - Die thermische Bewegung wirkt der Ordnung entgegen.
 - Aber: Unterhalb einer kritischen Temperatur T^* kommt es durch eine (quantenmechanische) **Austauschwechselwirkung** auch ohne äußeres Feld zu einer **spontanen Ausrichtung**.
 - Die Suszeptibilität ist häufig eine komplizierte Funktion (mindestens) von Feld und Temperatur:
$$\chi_m = \chi_m(T, H, \dots)$$
 - Der kollektive Magnetismus gliedert sich in Ferro-, Ferri- und Antiferromagnetismus

Ferromagnetismus - wichtig: Fe, Co, Ni

- $T = 0$: Alle permanente magnetische Dipole gleich ausgerichtet
- $0 < T \leq T^* = T_C$ (Curie-Temperatur): zunehmende Unordnung durch thermische Bewegung
- $T > T_C$: normaler Paramagnetismus
- typisch für ferromagnetische Stoffe:
 - $\chi_m > 0$ und $|\chi_m|$ sehr groß (1.000, 10.000, 100.000)
 - Hysterese
 - Weißsche Bezirke: Ursache für Hysterese



Ferri- und Antiferromagnetismus

- Ferrimagnetismus:
 - Festkörper setzt sich aus zwei Untergittern zusammen
 - Beide sind jeweils ferromagnetisch
 - Aber die jeweilige Magnetisierung ist nicht gleich und kompensiert sich teilweise.
- Antiferromagnetismus:
 - Spezialfall der Ferrimagnetismus
 - Beide Untergitter gleich stark magnetisiert. Aber umgekehrte Richtung.
 - Kritische Temperatur heißt hier **Néel-Temperatur**
 - Unterhalb: keine Magnetisierung
 - Oberhalb: Paramagnetismus (aber: $\chi_m = \chi_m(H)$)

Randwertaufgaben - magnetische Skalarpotential

- Einfachster Fall: lineares, isotropes, homogenes Medium im **gesamten** Lösungsvolumen: $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}(\vec{r}) \rightarrow$ Lösungsmethoden bekannt
- Auch einfach: **bereichsweise** lineare, isotrope, homogene Medien im Lösungsvolumen: Lösung in jedem Teilbereich, freie Konstanten so anpassen, dass Stetigkeitsbedingungen erfüllt werden.
- Keine Ströme im Lösungsvolumen V und Randwerte auf $O(V)$:
 - In V : $\text{rot } \vec{H} = \vec{0}$

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_m(\vec{r}) \quad \text{magnetisches Skalarpotential } \phi_m(\vec{r})$$

- Mit zumindest bereichsweise konstanten μ_r folgt:

$$\text{div } \vec{B} = 0 = \text{div } [\mu_0 \mu_r (-\text{grad } \phi_m)] \Rightarrow \boxed{\Delta \phi_m = 0}$$

- Aus der Elektrostatik bekannte Lösungsmethoden mit Berücksichtigung der vorgegebenen Randbedingungen anwenden.

Randwertaufgaben - magnetische Skalarpotential

- Keine Ströme im Lösungsvolumen V und Randwerte auf $O(V)$; **zusätzlich:**
 $\vec{M}(\vec{r}) \neq \vec{0}$ in V :

- In V : $\text{rot } \vec{H} = \vec{0}$

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_m(\vec{r})$$

- Mit zumindest bereichsweise konstanten μ_r folgt:

$$\text{div } \vec{B} = 0 = \mu_0 \underbrace{\text{div}(-\text{grad } \phi_m + \vec{M})}_{\vec{H}} \Rightarrow \boxed{\Delta \phi_m = \text{div } \vec{M}} \text{ Poisson-Gleichung}$$

- Ohne Randbedingungen folgt damit:

$$\phi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div } \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

- Mit Randbedingungen (Dirichlet: ϕ_m auf dem Rand gegeben; Neumann: $\frac{\partial \phi_m}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \text{grad } \phi_m = -\vec{n} \cdot \vec{H}$ auf dem Rand gegeben) \rightarrow Lösungsmethoden für Poisson-Gleichung mit Randbedingungen anwenden.

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Quasistationäre Felder I - Grundlagen

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Maxwell-Gleichungen

- Voller Satz der Maxwell-Gleichungen; Zeitableitungen bisher vernachlässigt

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- Wir betrachten nun den Fall, dass **einer** der Terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Induktion) oder $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (Verschiebungsstromdichte) vernachlässigt werden kann.
- Wir werden sehen: dies liefert noch **keine elektromagnetischen Wellen** als Lösung!
- **Magneto-Quasistatik**: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$ oder $\left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \ll |\vec{J}|$ (Verschiebungsstrom vernachlässigen)
- **Elektro-Quasistatik**: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ (Induktion vernachlässigen)

Harmonische Zeitabhängigkeit - Komplexe Feldgrößen

- Quasistatische Probleme treten meist im Zusammenhang mit **technischen Quellen** auf.
- Es ist daher naheliegend, alle Größen im **Frequenzbereich** darzustellen und beliebige Zeitabhängigkeiten im Sinne von **Fourier-Reihen** darzustellen.
- **Komplexe Feldgrößen** (i-te Komponente):

$$E_i(\vec{r}, t) = \hat{E}_i(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_{E,i}) = \Re \left\{ \hat{E}_i(\vec{r}) e^{j(\omega t + \varphi_{E,i})} \right\} = \Re \left\{ \underline{E}_i(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\}$$

$$H_i(\vec{r}, t) = \hat{H}_i(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_{H,i}) = \Re \left\{ \hat{H}_i(\vec{r}) e^{j(\omega t + \varphi_{H,i})} \right\} = \Re \left\{ \underline{H}_i(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\}$$

- Dabei werden die **Phasoren** (ruhenden Zeiger) eingeführt:

$$\underline{E}_i(\vec{r}) = \hat{E}_i(\vec{r}) \cdot e^{j\varphi_{E,i}}$$

$$\underline{H}_i(\vec{r}) = \hat{H}_i(\vec{r}) \cdot e^{j\varphi_{H,i}}$$

- Offensichtlicher Vorteil: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow$ Faktor $j\omega \rightarrow$ DGL einfacher!
- Wir werden ohne gesonderte Bemerkungen auch zwischen Frequenzbereich und Zeitbereich wechseln!

Elektro-Quasistatik (EQS)

- Annahme: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ und $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq \vec{0}$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_V$$

$$\text{div } \underline{\vec{D}} = \underline{\rho_V}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$$

$$j\omega \underline{\rho_V} + \text{div } \underline{\vec{J}} = 0$$

- Beiträge zur Stromdichte:

- $\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_E + \vec{J}_K = \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J}_E + \vec{J}_K$

- Leitungsstromdichte \vec{J}_L mit $\vec{J}_L = \kappa \cdot \vec{E}$

- Eingepreßte Stromdichte \vec{J}_E unabhängig von den Feldgrößen; Ursache EMK, Spannung

- Konvektionsstromdichte \vec{J}_K mit $\vec{J}_K = \text{const.} \cdot \text{grad } \rho_V$

Elektro-Quasistatik (EQS), Komplexes Potential

– Wegen $\text{rot } \underline{\vec{E}} = \vec{0}$: $\underline{\vec{E}} = -\text{grad } \underline{\phi}$ komplexes Skalarpotential

– $\text{rot } \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}$:

$$\begin{aligned}\text{div rot } \underline{\vec{H}} = 0 &= \text{div } (\underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}) = \text{div } ((\kappa \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{J}}_E + \underline{\vec{J}}_K) + j\omega \varepsilon \underline{\vec{E}}) \\ &= \text{div } ((\kappa + j\omega \varepsilon) \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{J}}_E + \underline{\vec{J}}_K) \\ &= -(\kappa + j\omega \varepsilon) \Delta \underline{\phi} + \text{div } (\underline{\vec{J}}_E + \underline{\vec{J}}_K)\end{aligned}$$

$$\Delta \underline{\phi} = \frac{1}{\kappa + j\omega \varepsilon} \text{div } (\underline{\vec{J}}_E + \underline{\vec{J}}_K) \quad \text{Poisson-Gleichung (komplex)}$$

- Im Frequenzbereich ist die **erscheint** die Poisson-Gleichung statisch
- Einige Anwendungsbereiche (nicht verwindende Verschiebungsströme; keine Induktion):
 - Hoch- und Höchstspannungstechnik bei (sehr) niedrigen Frequenzen
 - Feldprobleme in Halbleiterbauelementen (z.B. FET)
 - Biophysik; Nervenleitung
- Tiefe Frequenzen: Felder erscheinen statisch + Magnetfeld verschwindet → **EQS**

Magneto-Quasistatik (MQS)

- Annahme: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$ und $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0$$

- Beiträge zur Stromdichte: $\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_E + \vec{J}_K = \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J}_E + \vec{J}_K$
- $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$ und $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \rightarrow$ Magnetfelder eindeutig bestimmt
- Zusammen mit $\operatorname{div} \vec{J} = 0 \rightarrow$ Formeln der Magnetostatik strukturgleich in MQS
- Einige Anwendungsbereiche (verwindende Verschiebungsströme; Induktion):
 - Skin-Effekt (Übertragungsleitungen, insbesondere bei höheren Frequenzen)
 - Induktion (klassische elektrotechnische Antriebe und Generatoren)
- Tiefe Frequenzen: Felder erscheinen statisch + E-Feld verschwindet \rightarrow **MQS**

Verwendungsbereich EQS, MQS - was ist langsam?

- Betrachte Gebiet mit **Linearausdehnung** L
- Typische **Zeitkonstante**: $\tau = 1/\omega$
- räumliche Ableitungen (div, rot, grad): $\propto 1/L$
- zeitliche Ableitung: $\sim 1/\tau = \omega$
- $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \rightarrow \frac{\vec{H}}{L} = \vec{J} \rightarrow \vec{B} = \mu\vec{H} = \mu L\vec{J} \rightarrow \dot{\vec{B}} = \omega\mu L\vec{J}$
- $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \frac{\vec{E}}{L} = -\dot{\vec{B}} = -\omega\mu L\vec{J} \rightarrow \vec{D} = -\omega\mu\epsilon L^2\vec{J} \rightarrow \dot{\vec{D}} = -\omega^2\mu\epsilon L^2\vec{J}$
- Forderung: $|\dot{\vec{D}}| \ll |\vec{J}|$: $\omega^2\mu\epsilon L^2\vec{J} \ll \vec{J} \rightarrow \omega^2 \ll \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{1}{L^2}$

$$\omega \ll \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{L} = \frac{v_c}{L} \leq \frac{c}{L} \quad c: \text{Vakuum-Lichtgeschwindigkeit; } c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

- $L = 1 \text{ m}$: $f = \frac{\omega}{2\pi} \ll 50 \text{ MHz}$
- $2 \text{ m} \rightarrow 25 \text{ MHz}$; $10 \text{ m} \rightarrow 5 \text{ MHz}$, ...
- Umgekehrt betrachtet: $50 \text{ Hz} \rightarrow 1000 \text{ km}$

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Quasistationäre Felder II - Felddiffusion

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



MQS - Diffusionsgleichung für \vec{E}

- Magneto-Quasistatik (MQS): Maxwell-Gleichungen

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_V \qquad \text{div } \vec{B} = 0$$

- Materialgleichungen (lineares, homogenes, isotropes Medium)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{J} = \vec{J}_L = \kappa \vec{E}$$

- Annahme: keine makroskopische Ladungsträgerdichte $\rho_V = 0 \rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$
- Und damit: (Hinweis: $\Delta \vec{a} = \text{div grad } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \text{rot rot } \vec{a}$)

$$\text{grad div } \vec{E} = \vec{0} = \Delta \vec{E} + \text{rot rot } \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= -\text{rot rot } \vec{E} = \text{rot } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{H}) = \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} = \mu \kappa \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \end{aligned}$$

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \mu \kappa \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad \text{Diffusionsgleichung für } \vec{E}$$

MQS - Diffusionsgleichung für \vec{A}

- Aus dem Ampèreschen Durchflutungsgesetz folgt zunächst

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J} \rightarrow \text{rot rot } \vec{A} = \mu \vec{J}$$

- Mit $\vec{J} = \kappa \vec{E}$ gilt somit

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu \kappa \vec{E} \rightarrow \boxed{\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \kappa \vec{E}}$$

- Mit Hilfe des Induktionsgesetzes

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \rightarrow \boxed{\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \phi}$$

- Spezialfall $\rho_V = 0$: $\text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow \phi = \text{const.} = 0$ (o.B.d.A.) \rightarrow

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

- Hiermit folgt eine **Diffusionsgleichung**

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \mu \kappa \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = \text{grad} (\mu \kappa \phi + \text{div } \vec{A})}$$

- **Eichung**: $\text{div } \vec{A} = -\mu \kappa \phi$ bzw. $\text{div } \vec{A} = 0$ für $\rho_V = 0$ (Coulomb-Eichung)

MQS - weitere Diffusionsgleichungen

- Auf analoge Weise findet man weitere Diffusionsgleichungen:
- Magnetische Induktion

$$\Delta \vec{B} - \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \vec{0}$$

- Stromdichte

$$\Delta \vec{J} - \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} = \vec{0}$$

- Offensichtlich erhält man identische pDGL für \vec{E} , \vec{B} , \vec{J} und \vec{A} → Diffusionsgleichungen
- Unterschied: Randbedingungen sind anders!
- Wichtige Eigenschaft: irreversible Prozesse, d.h. der Übergang $t \rightarrow -t$ liefert eine andere pDGL

Exkurs: 3 Typen pDGL 2. Ordnung

- 1. **Elliptische partielle Differentialgleichung 2. Ordnung** $\Delta\alpha(\vec{r}) = \beta(\vec{r})$
 - Nur 2. Ableitungen (+,+,+)
 - z.B. Poisson-Gleichung $\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon}$
 - zeitunabhängige (stationäre) Probleme
 - Lösung beschreibt häufig den Zustand **minimaler Energie** → Variationsproblem, Finite Elemente Method (FEM)
 - **Randwert**probleme; Dirichlet bzw. Neumann Randwerte
- 2. **Parabolische partielle Differentialgleichung 2. Ordnung**
 $\Delta\alpha(\vec{r}, t) - c \frac{\partial}{\partial t} \alpha(\vec{r}, t) = \beta(\vec{r}, t)$
 - Bezüglich einer Variablen (Zeit) nur einfache Ableitung; 2. Ableitung: Vorzeichen (+,+,+,0)
 - z.B. Diffusions-Gleichung $\Delta E_x(\vec{r}, t) - \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} E_x(\vec{r}, t) = 0$
 - kein stationäres Probleme
 - **Anfangs-Randwert**probleme; Dirichlet bzw. Neumann Randwerte und zusätzlich Anfangswert z.B. $\alpha(\vec{r}, t = 0)$ vorgeben.
- 3. **Hyperbolische partielle Differentialgleichung 2. Ordnung**
 $\Delta\alpha(\vec{r}, t) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \alpha(\vec{r}, t) = \beta(\vec{r}, t)$
 - 2. Ableitung: Vorzeichen (+,+,+,-)
 - z.B. Wellen-Gleichung → **kommt noch**
 - **Anfangs-Randwert**probleme → **zusätzlich**: zeitliche Ableitung bei $t = 0$

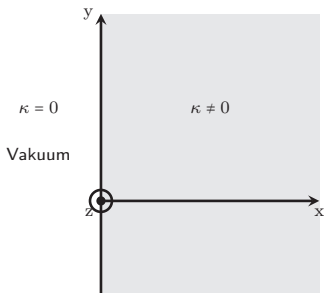
Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Quasistationäre Felder III - Felddiffusion im Halbraum

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Problemstellung



- Zwei unendlich ausgedehnten Halbräume (Vakuum und Leiter) → translationsinvarianz in y und z- Richtung
- \vec{E} und \vec{B} unabhängig von y und z
- Ableitungen nach y und z sind Null

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

- Lösungsgebiet: $x \geq 0$ (im Leiter)
- harmonische Zeitabhängigkeit: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} &= j\omega\mu\kappa\vec{E} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E} &= j\omega\mu\kappa\vec{E} \\ \vec{E} &= \sum_{i=x,y,z} \underline{E}_i \vec{e}_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \vec{B} &= j\omega\mu\kappa\vec{B} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{B} &= j\omega\mu\kappa\vec{B} \\ \vec{B} &= \sum_{i=x,y,z} \underline{B}_i \vec{e}_i\end{aligned}$$

Bestimmungsgleichungen

- Rotation des E-Feldes hat keine x-Komponente. Es gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{\underline{E}} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \underline{E}_k \stackrel{\text{hier}}{=} -\partial_x \underline{E}_z \vec{e}_y + \partial_x \underline{E}_y \vec{e}_z \stackrel{!}{=} -j\omega \sum_{i=x,y,z} \underline{B}_i \vec{e}_i \rightarrow \underline{B}_x = 0$$

- Analog: Rotation des B-Feldes (H-Feldes) hat keine x-Komponente. Damit folgt:

$$\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{\underline{B}} = \operatorname{rot} \vec{\underline{H}} = \vec{\underline{J}} = \kappa \vec{\underline{E}} \rightarrow \text{E-Feld hat keine x-Komponente: } \underline{E}_x = 0$$

- Hiermit folgen 4 strukturgleiche skalare Diffusionsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{E}_y &= j\omega\mu\kappa \underline{E}_y & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{B}_y &= j\omega\mu\kappa \underline{B}_y \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{E}_z &= j\omega\mu\kappa \underline{E}_z & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{B}_z &= j\omega\mu\kappa \underline{B}_z \end{aligned}$$

- Es reicht, eine der Gleichungen zu betrachten: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{E}_y = j\omega\mu\kappa \underline{E}_y$

Hinweis: Stetigkeit von E_t ; wähle $\vec{e}_y \parallel \vec{\underline{J}}(x=0) = \kappa \vec{\underline{E}}(x=0)$

Eindringtiefe - Skin-Tiefe - Allgemeine Lösung

- Wir betrachten: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{E}_y = j\omega\mu\kappa \underline{E}_y$

- Ansatz: $\underline{E}_y = \underline{A}e^{kx}$ mit $[k] = m^{-1}$

- Dies liefert: $k^2 = j\omega\mu\kappa$

- Und somit:

$$k_{1/2} = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu\kappa} = \pm (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} = \pm \frac{1+j}{\delta}$$

- Hierbei ist δ die **Eindringtiefe** bzw. **Skin-Tiefe**

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}} \quad [\delta] = m$$

- Die allgemeine Lösung ist somit

$$\boxed{\underline{E}_y = \underline{A}_1 e^{x/\delta} e^{jx/\delta} + \underline{A}_2 e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta}}$$

Allgemeine Lösung

- gefundene Lösung: $\underline{E}_y = \underline{A}_1 e^{x/\delta} e^{jx/\delta} + \underline{A}_2 e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta}$
- Könnte analog auch für \underline{E}_z , \underline{B}_y und \underline{B}_z hingeschrieben werden. Besser aber $\text{rot } \vec{\underline{E}} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \underline{E}_k = -\partial_x \underline{E}_z \vec{e}_y + \partial_x \underline{E}_y \vec{e}_z = -j\omega \sum_{i=x,y,z} \underline{B}_i \vec{e}_i$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_y &= -j\omega \underline{B}_z & \Rightarrow \underline{B}_z &= -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_y \\ & & &= -\frac{1+j}{j\omega} \frac{1}{\delta} \left[\underline{A}_1 e^{x/\delta} e^{jx/\delta} - \underline{A}_2 e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} \right] \end{aligned}$$

- Bestimmung der Konstanten

1. Für $x \rightarrow \infty$ muss das E-Feld verschwinden $\rightarrow \underline{A}_1 = 0$

2. An der Oberfläche ($x = 0$) gilt

$$\underline{E}_y = \underline{E}_y(x=0) = \frac{1}{\kappa} \underline{J}_y(x=0) = \underline{E}_{y0} = \frac{1}{\kappa} \underline{J}_{y0} \Rightarrow \underline{A}_2 = \underline{E}_{y0}$$

- Hiermit (o.B.d.A.: $\underline{E}_z(x=0) = \underline{E}_{z0} = 0 \rightarrow$ andere Komponenten brauchen wir nicht)

$$\underline{E}_y = \underline{E}_{y0} e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} \quad \underline{H}_z = \frac{\underline{B}_z}{\mu} = \frac{1+j}{j\omega\mu} \frac{1}{\delta} \underline{E}_{y0} e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}$$

Dämpfung - Phasendrehung

- Ausgehend von

$$\underline{E}_y = \underline{E}_{y0} e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} \quad \underline{H}_z = \frac{B_z}{\mu} = \frac{1+j}{j\omega\mu} \frac{1}{\delta} \underline{E}_{y0} e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}$$

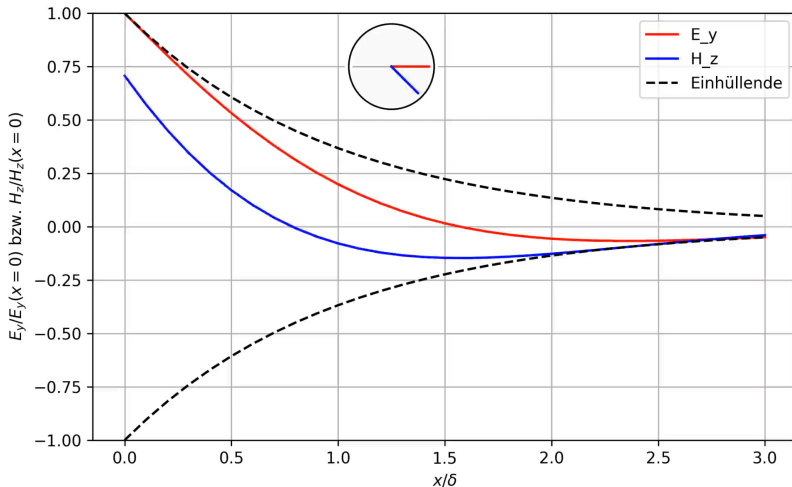
- stellen wir um:

$$\begin{aligned} \underline{H}_z &= \frac{1-j}{\omega\delta\mu} \underline{E}_{y0} e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} \\ &= (1-j) \sqrt{\frac{\kappa}{2\omega\mu}} \underline{E}_{y0} e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} \\ &= \frac{\kappa\delta}{2} \underbrace{(1-j)}_{\sqrt{2}e^{-j\pi/4}} \underline{E}_{y0} \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{Dämpfung}} \underbrace{e^{-jx/\delta}}_{\text{Phasendrehung}} = \underbrace{\kappa \underline{E}_{y0}}_{\underline{J}_{y0}} \frac{\delta}{\sqrt{2}} e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} e^{-j\pi/4} \end{aligned}$$

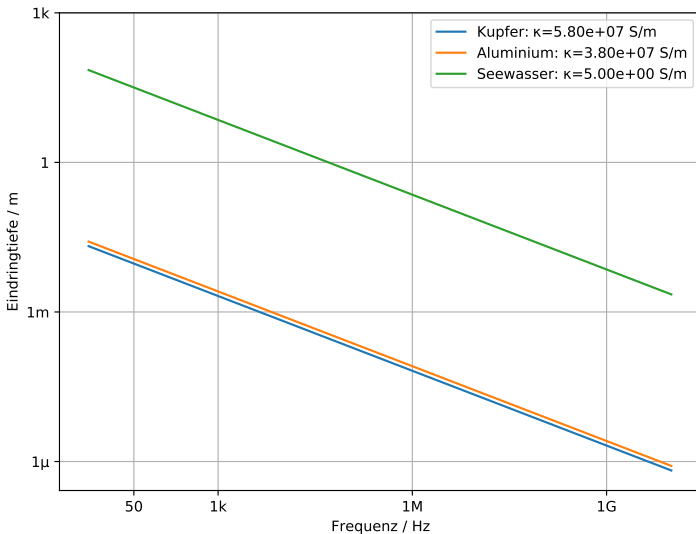
- Es gilt: $\frac{|\underline{H}_z(x=\delta)|}{|\underline{H}_z(x=0)|} = \frac{|\underline{E}_y(x=\delta)|}{|\underline{E}_y(x=0)|} = e^{-1} \approx 0,37$; nach 2δ : $e^{-2} \approx 0,14$ usw.

Schwingungseigenschaften der Lösung

→ Video Link



Eindringtiefe



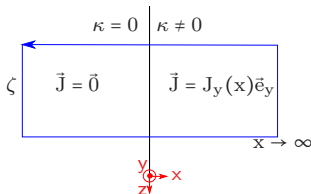
Lösung vor dem Leiter

- Lösung für $x \geq 0$ (im Leiter):

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_y \vec{e}_y = \underline{E}_{y0} e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} \vec{e}_y \quad \underline{\vec{H}} = \underline{H}_z \vec{e}_z = \kappa \underline{E}_{y0} \frac{\delta}{\sqrt{2}} e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} e^{-j\pi/4} \vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{J}} = \underline{J}_y \vec{e}_y = \kappa \underline{E}_y \vec{e}_y = \kappa \underline{E}_{y0} e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} \vec{e}_y \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}}$$

- Berechnung des Magnetfeldes für $x < 0$ (vor dem Leiter) über $\text{rot } \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}$



$$\oint \underline{\vec{H}}(\mathbf{x}) \cdot d\vec{s} = \iint \underline{\vec{J}} \cdot d\vec{A}$$

$$\zeta \underline{\vec{H}}(\mathbf{x}) \cdot \vec{e}_z = \zeta \int_0^\infty \underline{\vec{J}}(\mathbf{x}) \cdot \vec{e}_y dx$$

$$\underline{H}_z(x < 0) = \underline{H}_z = (1 - j) \kappa \underline{E}_{y0} \frac{\delta}{2} = \underline{H}_z(x = 0^+)$$

Tangentialkomponente von $\underline{\vec{H}}$ ist **stetig!**

Oberflächenstromdichte

- Die Stetigkeitsbedingung für Tangentialkomponente des Magnetfeldes lautet:

$$\vec{t} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot \vec{J}_A \Leftrightarrow \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_A \quad \vec{n} : \text{von 1 nach 2}$$

- Im vorliegende Fall: $\vec{e}_x \times (\underline{H}_z(0^+) - \underline{H}_z(0^-)) \vec{e}_z = \boxed{\vec{J}_A = \vec{0}}$
- Häufig nutzt man die **Oberflächenstromdichte** \vec{J}_A jedoch auch als **Ersatzgröße** für das innere Magnetfeld $\vec{H}(x \geq 0)$ (Oberflächenstromdichte \neq Stromdichte an der Oberfläche!). Setzt man $\vec{H}(x) = \vec{0}$ für $x \geq 0$ folgt für die Oberflächenstromdichte

$$\vec{J}_A = \underline{H}_z(0^-) \vec{e}_y = \int_0^\infty \underline{J}_y(x) dx \vec{e}_y$$

- Verwendung findet die Oberflächenstromdichte als Ersatzgröße z.B. bei numerischen Rechnungen oder bei der Modellierung von Schirmungen (insbesondere bei Aperturen in Schirmen).
- Dringt ein externes Magnetfeld nicht in ein begrenzendes Material ein ($\delta = 0$, z.B. $\kappa \rightarrow \infty$), so gibt es eine **echte** Oberflächenstromdichte mit $\vec{J}_A = \vec{n} \times \vec{H}(0)$; \vec{n} aus dem Leiter heraus gerichtet.

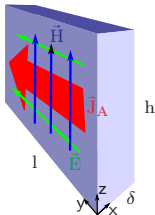
Oberflächenimpedanz - Oberflächenwiderstand

- Aus dem elektrischen Feld und dem magnetischen Feld an der Oberfläche ergibt sich die **Oberflächenimpedanz** \underline{Z}_A , deren Realteil der **Oberflächenwiderstand** R_A ist:

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{E}(x=0)}{\underline{H}(x=0)} = \frac{\underline{E}(x=0)}{\underline{J}_A} = \frac{1+j}{\kappa\delta} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa}}$$

$$R_A = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} = \frac{1}{\kappa\delta}$$

- **Widerstand** R eines Bereichs der Dicke δ , Länge l und Höhe h :



$$R = \frac{l}{\kappa A} = \frac{l}{\kappa\delta h}$$

$$R = R_A \frac{l}{h} \quad [R_A] = \Omega = \Omega/\square \text{ „Ohm pro Quadrat“}$$

l/h : Minimale Anzahl der Quadrate, die in das Oberflächenstück passen.

- **Flächenstrom**: $I_A = \int_0^h \underline{J}_A dz \quad [I_A] = A$

Leistungsumsatz - Feldperspektive

- Größen im Leiter im Zeitbereich:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, t) &= \Re \left\{ \underline{E}_0 e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} e^{j\omega t} \right\} \vec{e}_y \quad \underline{E}_0 = E_0 e^{j\varphi_E} \\ &= E_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \varphi_E) \vec{e}_y \\ \vec{J}(x, t) &= \kappa E_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \varphi_E) \vec{e}_y\end{aligned}$$

- Quadratischer Mittelwert der Stromdichte:

$$\left\langle |\vec{J}(x, t)|^2 \right\rangle_T = \frac{\kappa^2 E_0^2}{T} \int_0^T e^{-2x/\delta} \cos^2(\omega t - x/\delta + \varphi_E) dt = \frac{\kappa^2 E_0^2}{2} e^{-2x/\delta}$$

- Verlustleistung (Höhe h, Länge l)

$$\begin{aligned}P &= \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \iiint_V \frac{1}{\kappa} |\vec{J}|^2 dV \\ \langle P \rangle_T &= \iiint_V \frac{1}{\kappa} \left\langle |\vec{J}(t, x)|^2 \right\rangle dV = \underbrace{lh}_A \int_0^\infty \frac{1}{\kappa} \frac{\kappa^2 E_0^2}{2} e^{-2x/\delta} dx = A \frac{\kappa E_0^2}{4} \delta\end{aligned}$$

Leistungsumsatz - Leiterperspektive

- Oberflächenstromdichte - Zeitbereich:

$$\underline{\vec{J}}_A = \underline{H}_z(0^-) \vec{e}_y \quad \underline{E}_0 = E_0 e^{j\varphi_E} \quad \rightarrow \vec{J}_A(t) = \frac{\kappa E_0 \delta}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \pi/4 + \varphi_E) \vec{e}_y$$

- Quadratischer Mittelwert der Oberflächenstromdichte:

$$\langle |\vec{J}_A(t)|^2 \rangle_T = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 E_0^2}{2} \delta^2 = \frac{\kappa^2 E_0^2}{4} \delta^2$$

- Flächenstrom:

$$I_A = \int_0^h \underline{J}_A dz = h |\underline{J}_A| \Rightarrow \langle I_A^2 \rangle_T = h^2 \langle |\vec{J}_A(t)|^2 \rangle_T$$

- Verlustleistung:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle_T &= \langle I_A^2 \rangle_T R = \langle I_A^2 \rangle_T R_A \frac{1}{h} \\ &= h^2 \langle |\vec{J}_A(t)|^2 \rangle_T \frac{1}{\kappa \delta} \frac{1}{h} = lh \frac{\kappa E_0^2}{4} \delta = A \frac{\kappa E_0^2}{4} \delta \end{aligned}$$

Feldperspektive vs Leiterperspektive

- Die aus der Diffusion der Felder berechneten Verluste entsprechen exakt den Ohmschen Leiterverluste des Flächenstroms
- Man spricht von **Skineffekt-Verlusten**.
- Wird die exponentiell abklingenden Stromdichte im Halbraum **ersatzweise** durch einen konstanter Strom (der **Flächenstrom**) ersetzt, so werden in einer vom Strom durchsetzten Schicht der Dicke δ (**Skintiefe/Eindringtiefe**) gerade die Skineffekt-Verluste umgesetzt.
- Setzt man **frequenzunabhängige Materialparameter**, so
 - steigt der Flächenwiderstand proportional zu \sqrt{f} : $R_a \propto \sqrt{f}$
 - sinkt die Eindringtiefe umgekehrt proportional zu \sqrt{f} : $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{f}}$
- Offensichtlich hat das Modell **Grenzen hin zu sehr hohen Frequenzen**:
 - Die Ionosphäre reflektiert im Kurzwellenbereich, weil die Felder nicht eindringen können. Bei wesentlich höheren Frequenzen (z.B. sichtbares Licht) ist die Ionosphäre aber wieder transparent \rightarrow Felder können wieder eindringen
 - Schon dünne Metallfolien sind gute Schirme für hochfrequente Felder (z.B. Folienschirm in CAT-5 Kabeln). Aber dünne Folien schirmen nicht gegen Röntgen- oder Gamma-Strahlung.

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Quasistationäre Felder IV- Induktion

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Problemstellung

- Ausgangspunkt sind die Maxwellgleichungen im Rahmen der Magnetoquasistatik (MQS), also $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$ und $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_V \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

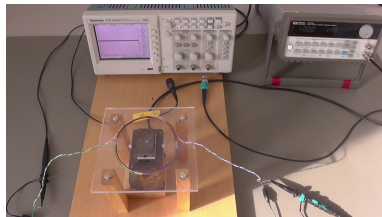
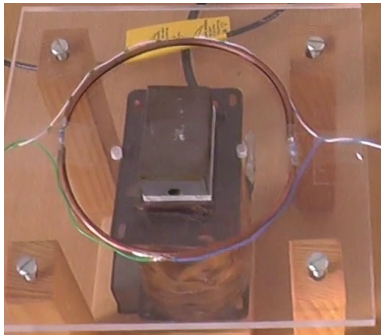
- Das **Faradaysche Induktionsgesetz** gilt in der **lokalen und instantanen** Formulierung $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ **immer und überall**.
- **Aber:** Bei der Anwendung auf tatsächliche Problemstellungen, die natürlich **ausgedehnt** sind und häufig **Relativbewegungen** eine Rolle spielen, kommt es schnell zu Interpretationsproblemen und **scheinbaren Paradoxien**.
 - Induzierte Spannung ist **keine Potentialdifferenz**
 - Ausgedehnte Anordnung, aber **keine Relativbewegung**:

$$U_{\text{ind}} = \text{EMK} = \mathcal{E} = \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\dot{\Phi} \rightarrow \text{problemlos}$$

- aber allgemein: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \oint_{C(A(t))} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\iint_{A(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$

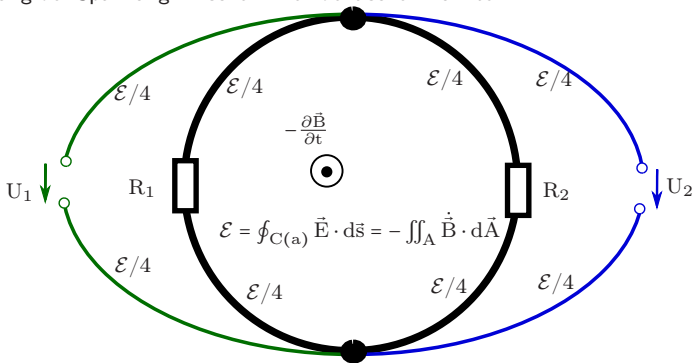
EMK vs Potentialdifferenz

- Wegen $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$ ist das elektrische Feld **kein Gradientenfeld**
- Spannungen im Sinne von **Potentialdifferenzen** sind **nicht definiert**, weil es kein dem E-Feld zugeordnetes Skalarpotential gibt.
- $EMK = U_{\text{ind}} = \mathcal{E}$ ist **keine Potentialdifferenz** → Spannungsmessungen zwischen identischen Punkten sind **nicht wegunabhängig**.



Scheinbar paradoxe Spannungsmessung

- Messung der Spannung zwischen zwei identischen Punkten.



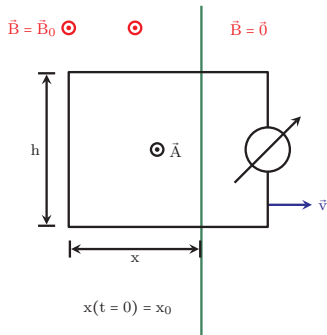
$$\mathcal{E} + I(R_1 + R_2) = 0 \quad U_1 + \mathcal{E} + IR_2 = 0 \quad -U_2 + \mathcal{E} + IR_1 = 0 \rightarrow \boxed{\frac{U_1}{U_2} = -\frac{R_1}{R_2}}$$

Anordnungen mit Relativbewegung

– Offenbar gilt $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$:

$$\rightarrow \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = 0 \quad ???$$

- Experiment: **es wird eine Spannung induziert**
- Erklärungsausweg: **Lorentzkraft** auf Ladungsträger im bewegtem Leiter
- zulässig, aber völlig **unbefriedigend** im Rahmen der Feldtheorie
- Tatsächlich lässt sich dieses Problem auf zwei Weisen lösen
 - **Mathematisch** mit der vollständigen **Leibniz-Regel für Integrale**
 - **Physikalisch** mit der **Speziellen Relativitätstheorie**



Leibniz Integralregel — Ableitung unter dem Integral

- Eindimensionaler Fall noch relativ bekannt:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx \right) = f(t, b(t)) \frac{d}{dt} b(t) - f(t, a(t)) \frac{d}{dt} a(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx$$

- 3D Form (Flanders, „Differentiation under the Integral Sign“, The American Mathematical Monthly, Vol. 80, No. 6, 615-627, (1973)):

$$\frac{d}{dt} \iint_{A(t)} \vec{f}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \iint_{A(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{f}(\vec{r}, t) + [\operatorname{div} \vec{f}(\vec{r}, t)] \vec{v} \right) \cdot d\vec{A} - \oint_{C(A(t))} \vec{v} \times \vec{f}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s}$$

- Hier $\operatorname{div} \vec{B} = 0$:

$$\frac{d}{dt} \iint_{A(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \iint_{A(t)} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} - \oint_{C(A(t))} \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s}$$

- Damit folgt dann:

$$\mathcal{E} = \text{EMK} = U_{\text{ind}} = \oint_{C(A(t))} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \iint_{A(t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\dot{\Phi}$$

Spezielle Relativitätstheorie

- Axiome der SRT (→ Axiomatische Grundlagen)
 - **Relativitätsprinzip** - Naturgesetze haben in Inertialsystemen die gleiche Form
 - **Universalität der Lichtgeschwindigkeit** - Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist eine universelle Konstante, die in allen Inertialsystemen den gleichen Wert hat.
- Ladungserhaltung folgt im Rahmen der SRT (→ Noether-Theorem, Noether-Strom)
- Bekannt: **Lorentztransformation, Raum-Zeit, Längenkontraktion, Zeitdilatation**
- Hierbei tauchen immer folgende Faktoren auf:

$$\beta = \frac{v}{c}, \beta \in [0, 1] \text{ und } \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}}, \gamma \in [1, \infty)$$

β	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
γ	1	1.005	1.021	1.048	1.091	1.155	1.25	1.667	∞

- Gute Näherung für nicht-relativistische Geschwindigkeiten: **$\gamma = 1$**

Transformation der Felder

- Es sei S' ein Inertialsystem, das sich mit $\vec{v} = \text{const.}$ relativ zum Laborsystem S bewegt
- Mit $\vec{v} = v\vec{e}_v$ können die Felder in S in longitudinale und transversale Anteile zerlegt werden:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} = (\vec{e}_v \cdot \vec{E})\vec{e}_v + (\vec{e}_v \times \vec{E}) \times \vec{e}_v$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} = (\vec{e}_v \cdot \vec{B})\vec{e}_v + (\vec{e}_v \times \vec{B}) \times \vec{e}_v$$

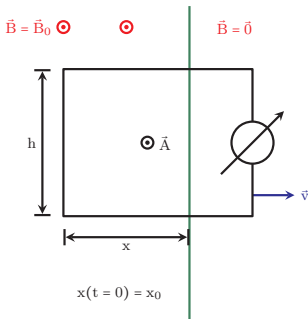
- Im System S' ergeben sich diese Felder dann zu:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \vec{E}_{\parallel} + \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) & \vec{B}' &= \vec{B}_{\parallel} + \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}) \\ &= (\vec{e}_v \cdot \vec{E})\vec{e}_v + \gamma[\vec{e}_v \times (\vec{e}_v \times \vec{E}) + \vec{v} \times \vec{B}] & &= (\vec{e}_v \cdot \vec{B})\vec{e}_v + \gamma[\vec{e}_v \times (\vec{e}_v \times \vec{B}) - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}]\end{aligned}$$

- Für $v \ll c$:

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B} & \vec{B}'_{\perp} &= \vec{B}_{\perp}\end{aligned}$$

Ruhesystem der Schleife



- Felder im Ruhesystem der Schleife (S'):

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B} & \vec{B}'_{\perp} &= \vec{B}_{\perp} \end{aligned}$$

- Es gilt $\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$ in S'
- Fläche ist zeitunabhängig in S'
- Damit folgt dann **erneut**:

$$U_{\text{ind}} = \oint_{C(A)} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\dot{\Phi}$$

- Mathematik (pure Logik) und Physik (aus Beobachtung abgeleitete Theorie) liefern **identische Resultate!**

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Beliebig veränderliche Felder- Energieerhaltung

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Maxwellgleichungen – Ladungserhaltung

- Wir betrachten nun den **vollständigen Satz der Maxwell-Gleichungen**:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_V & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

- **lineare, homogene und isotrope Medien und lokales Ohmsches Gesetz**

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \kappa \vec{E}$$

- **Ladungserhaltung** (eigentlich axiomatisch vorausgesetzt) folgt direkt aus den Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{H}) = 0 = \operatorname{div} \vec{J} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \operatorname{div} \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung (lokal)}$$

$$\oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_V dV = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung (integral)}$$

Energieerhaltung

- Betrachte bewegte Ladung $q = \rho_V dV$, Geschwindigkeit \vec{v} ($|\vec{v}| \ll c$)

- Lorenzkraft:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow d\vec{F} = \rho_V dV (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- Differentielle **verrichtete Arbeit** dW bei Verschiebung um $\Delta\vec{s} = \vec{v}\Delta t$:

$$dW = d\vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = \rho_V dV (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \Delta\vec{s} = \rho_V dV \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \rho_V dV \vec{E} \cdot \vec{v} \Delta t$$

- Differentielle **Leistung** $d\left(\frac{W}{\Delta t}\right)$:

$$d\left(\frac{W}{\Delta t}\right) = \rho_V \vec{v} \cdot \vec{E} dV = \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

- Hiermit ergibt sich die **Leistung** zu

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (\text{analog zu } P = U \cdot I \text{ im Leiter})$$

- **Verlustleistungsdichte** $p_V = \vec{J} \cdot \vec{E} \rightarrow$ Stationäres elektrisches Strömungsfeld

Energieerhaltung – Poyntingscher Satz

- Weitere Betrachtung der Verlustleistungsdichte $p_V = \vec{J} \cdot \vec{E}$:

$$p_V = \vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{E} \cdot \left(\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- Es gilt weiterhin:

$$\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H}$$

- Somit ergibt sich der **Poyntingsche Satz** in differentieller Form:

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = -\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{allgemein}$$

- Für $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu \vec{H}$ folgt

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = -\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right] \quad \text{lineare, homogene, isotrope Medien}$$

Energieerhaltung – Poyntingscher Satz (fortgesetzt)

- Wir betrachten die Terme im Poyntingschen Satz

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = -\operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right] \quad \text{lineare, homogene, isotrope Medien}$$

- Joulesche Wärme $\vec{E} \cdot \vec{J} \rightarrow$ Stationäres el. Strömungsfeld
- Elektrische Energiedichte $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \rightarrow$ Elektrostatik VIII - Materie
- Magnetische Energiedichte $\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \rightarrow$ Magnetostatik I - Grundlagen
- Offenbar ist die gesamte **elektromagnetische Energiedichte** (lineare, isotrope, homogene Medien)

$$w_{\text{em}} = w_{\text{e}} + w_{\text{m}} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Energieerhaltung – Poyntingscher Satz (fortgesetzt)

- Differentielle Darstellung

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = -\operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right] = -\operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t}$$

- Übergang zur integralen Darstellung → Volumenintegral:

$$\underbrace{\frac{W}{\Delta t} = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV}_{\text{mechanisch, thermodynamisch}} = - \underbrace{\iint_{O(V)} \vec{E} \times \vec{H} \cdot d\vec{A} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{\text{em}} dV}_{\text{elektrisch}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{\text{mech}} dV = - \iint_{O(V)} \vec{E} \times \vec{H} \cdot d\vec{A} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{\text{em}} dV$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (w_{\text{mech}} + w_{\text{em}}) dV = - \iint_{O(V)} \vec{E} \times \vec{H} \cdot d\vec{A}} \quad \text{integraler Poyntigscher Satz}$$

Energieerhaltung – Poynting-Vektor

- Integraler Poyntingscher Satz

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (w_{\text{mech}} + w_{\text{em}}) dV = - \oiint_{O(V)} \vec{E} \times \vec{H} \cdot d\vec{A}$$

- Änderung der Energie im Volumen V entspricht dem Fluss des Vektors $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ durch die Oberfläche des Volumens $O(V)$.
- Die Größe

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}} \quad [\vec{S}] = \text{W m}^{-2}$$

ist die lokale **Energieflussdichte** oder der **Poynting-Vektor**.

- Hiermit schreiben sich integraler und differentieller Poyntingscher Satz wie folgt:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (w_{\text{mech}} + w_{\text{em}}) dV + \oiint_{O(V)} \vec{S} \cdot d\vec{A} = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{mech}} + w_{\text{em}}) + \text{div} \vec{S} = 0}$$

Energieerhaltung – harmonische Zeitabhängigkeit

- Harmonische Zeitabhängigkeit: (→ Quasistationäre Felder - Grundlagen)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re\{ \underline{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \} = \frac{1}{2} \left[\underline{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} + \underline{\vec{E}}^*(\vec{r}) e^{-j\omega t} \right]$$

- Anwendung für $w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$:

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\underline{\vec{E}} e^{j\omega t} + \underline{\vec{E}}^* e^{-j\omega t} \right) \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\underline{\vec{D}} e^{j\omega t} + \underline{\vec{D}}^* e^{-j\omega t} \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}} e^{j2\omega t} + \underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{D}}^* e^{-j2\omega t} \right] + \frac{1}{8} \left[\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^* + \underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{D}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \Re\{ \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}} e^{j2\omega t} \} + \frac{1}{4} \Re\{ \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^* \} \end{aligned}$$

- Mittelwert über eine Periode:

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \Re\{ \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^* \} = \frac{1}{4} \underbrace{\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^*}_{(\underline{\vec{D}} = \varepsilon \underline{\vec{E}}), \varepsilon \in \mathbb{R}}$$

analog

$$\langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \Re\{ \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^* \} = \frac{1}{4} \underbrace{\underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^*}_{(\underline{\vec{B}} = \mu \underline{\vec{H}}), \mu \in \mathbb{R}}$$

Mittelwerte – komplexer Poynting-Vektor

- zeitliche Mittelwerte:

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \Re \left\{ \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^* \right\} = \underbrace{\frac{1}{4} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^*}_{(\underline{\vec{D}} = \epsilon \underline{\vec{E}}), \epsilon \in \mathbb{R}}$$

$$\langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \Re \left\{ \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^* \right\} = \underbrace{\frac{1}{4} \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^*}_{(\underline{\vec{B}} = \mu \underline{\vec{H}}), \mu \in \mathbb{R}}$$

$$\langle p_V \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^* \right\} = \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^*}_{(\underline{\vec{J}} = \kappa \underline{\vec{E}}), \kappa \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \right\}} = \Re \left\{ \underline{\vec{S}} \right\}$$

- Hierbei wird der **komplexe Poyntingsche Vektor** $\underline{\vec{S}}$ eingeführt:

$$\boxed{\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*} \quad \text{komplexer Poynting-Vektor}$$

komplexer Poyntingscher-Satz (differenziell)

- Wir bilden die Divergenz des komplexen Poynting-Vektor $\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \right) &= \frac{1}{2} \left(\underline{\vec{H}}^* \cdot \operatorname{rot} \underline{\vec{E}} - \underline{\vec{E}} \cdot \operatorname{rot} \underline{\vec{H}}^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{\vec{H}}^* \cdot (-j\omega \underline{\vec{B}}) - \underline{\vec{E}} \cdot (\underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}})^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-j\omega \underline{\vec{H}}^* \cdot \underline{\vec{B}} - \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^* + j\omega \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^* \right)\end{aligned}$$

- Insgesamt gilt somit der **komplexe Poyntingsche Satz** in differentieller Form

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{\vec{S}} + \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^* + j2\omega \left[\frac{1}{4} \underline{\vec{H}}^* \cdot \underline{\vec{B}} - \frac{1}{4} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^* \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{div} \underline{\vec{S}} + \langle p_V \rangle + j2\omega \left[\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle \right] &= 0\end{aligned}$$

- Aufspaltung in Real- und Imaginärteil (Mittelwerte sind reelle Werte):

$$\underbrace{\Re \{ \operatorname{div} \underline{\vec{S}} \} + \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^*}_{\langle p_V \rangle} = 0 \quad \Im \{ \operatorname{div} \underline{\vec{S}} \} + 2\omega \left[\underbrace{\frac{1}{4} \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^*}_{\langle w_m \rangle} - \underbrace{\frac{1}{4} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^*}_{\langle w_e \rangle} \right] = 0$$

komplexer Poyntingscher-Satz (integral)

- Aus der differentielle Form folgt sofort der **integrale komplexe Poyntingsche Satz**:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{S}} + \langle p_V \rangle + j2\omega [\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle] = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\iint_{O(V)} \underline{\underline{S}} \cdot d\vec{A} + \iiint_V \langle p_V \rangle dV + j2\omega \iiint_V (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle) dV = 0}$$

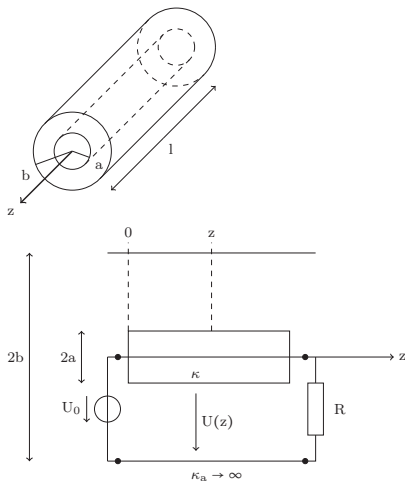
- Der Realteil entspricht der mittleren **Wirkleistung** (umgesetzte Energie, Ohmschen Verluste):

$$\langle P_V \rangle = \iiint_V \langle p_V \rangle dV = - \iint_{O(V)} \Re \{ \underline{\underline{S}} \} \cdot d\vec{A}$$

- Der Imaginärteil entspricht der mittleren **Blindleistung**:

$$2\omega \iiint_V (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle) dV = - \iint_{O(V)} \Im \{ \underline{\underline{S}} \} \cdot d\vec{A}$$

Beispiel: Koaxialkabel



- Koaxialleitung mit ohmschen Verlusten nur im Innenleiter: $\kappa_a \rightarrow \infty$
- Betrachtung bei tiefen Frequenzen: $l \ll \lambda$, $a \ll \delta$, $\omega L \ll R_i$
- Strom ist konstant: $I = I(\rho, \varphi, z) = I_0$
- Widerstand des Innenleiters bis Position z : $R_i(z) = \frac{z}{\kappa \cdot \pi a^2}$
- Maschengleichungen:

große Masche: $U_0 = R_i(l)I_0 + RI_0$

kleine Masche: $U_0 = U(z) + R_i(z)I_0$

$$\rightarrow U(z) = U_0 \left(1 - \frac{z}{l + \kappa \pi a^2 R} \right)$$

Beispiel: Koaxialkabel (fortgesetzt)

- Magnetfeld im Innenleiter und im Zwischenraum (außen Null):

$$\vec{H}^i = H_\varphi^i \vec{e}_\varphi = \frac{I_0}{2\pi a} \frac{\rho^2}{a^2} \vec{e}_\varphi \quad \text{und} \quad \vec{H}^a = H_\varphi^a \vec{e}_\varphi = \frac{I_0}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$

- Elektrisches Feld im Innenleiter nur z-Komponente: $\vec{E}^i = E_z^i \vec{e}_z = \frac{J_z}{\kappa} \vec{e}_z = \frac{I_0}{\kappa \pi a^2} \vec{e}_z$
- Elektrisches Feld im Zwischenraum: Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta \phi = 0$:
 - In Zylinderkoordinaten:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \rightarrow \text{Separationsansatz} \rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \phi$$

- + Randbedingungen: $E_z^a(\rho = a) = E_z^i$ und $E_z^a(\rho = b) = 0$
- + Anfangsbedingung: $U_0 = \int_a^b E_\rho(\rho, z = 0) d\rho$
- Das ergibt:

$$E_\rho^a = \frac{U_0}{\rho \ln b/a} \left(1 - \frac{z}{1 + \kappa \pi a^2 R} \right) \quad E_z^a = \frac{U_0 \ln b/\rho}{\ln b/a} \frac{1}{1 + \kappa \pi a^2 R}$$

Beispiel: Koaxialkabel (fortgesetzt)

- Berechnung des komplexen Poynting Vektors aus den Feldern:

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{S}}^i &= \frac{1}{2} \underline{\tilde{E}}^i \times \underline{\tilde{H}}^{i*} = -\frac{1}{2} E_z^i H_\varphi^i \underline{\tilde{e}}_\rho \\ \underline{\tilde{S}}^a &= \frac{1}{2} \underline{\tilde{E}}^a \times \underline{\tilde{H}}^{a*} = -\frac{1}{2} E_z^a H_\varphi^a \underline{\tilde{e}}_\rho + \frac{1}{2} E_\rho^a H_\varphi^{a*} \underline{\tilde{e}}_z\end{aligned}$$

- $\underline{\tilde{S}}^i$ und $\underline{\tilde{S}}^a$ sind reel \rightarrow nur Wirkleistung! (ωL wurde explizit vernachlässigt!)
- radial nach innen fließende Energie:

$$-2\pi a \int_0^l \underline{\tilde{S}}^i(\rho = a) \cdot \underline{\tilde{e}}_\rho dz = \frac{1}{2} R_i(l) I_0^2 \rightarrow \text{Verlustleistung im Innenleiter}$$

- im Zwischenraum axialer Energietransport:

$$\int_a^b \underline{\tilde{S}}^a(\rho) \cdot \underline{\tilde{e}}_z 2\pi \rho d\rho = \frac{1}{2} I_0 U(z)$$

- Von der Quelle abgegebene Leistung ($z = 0$):

$$P = \frac{1}{2} I_0 U(0) = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R + R_i(l)}$$

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Beliebig veränderliche Felder - Impulserhaltung

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Impulserhaltung

- Warum betrachten wir den Impuls?
- Mechanik → Beziehung zwischen **Impuls** \vec{p}^{mech} und **Kraft** \vec{F} :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p}^{\text{mech}}$$

- Diese Beziehung gilt auch für den **relativistischen Impuls** (bei sehr hohen Geschwindigkeiten, im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie) und ist somit wesentlich fundamentaler als die klassische Formulierung $\vec{F} = m\vec{a}$; $\vec{p}^{\text{mech}} = m\vec{v}$.
- Und wir wissen schon, dass die elektromagnetische Feldtheorie eine relativistische Theorie ist → Quasistationäre Felder VIII - Induktion.
- In der elektromagnetischen Feldtheorie kann prinzipiell die **Lorenzkraft** herangezogen werden:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- Für viele konkrete Berechnungen (z.B. elektrische Antriebe) ist eine **Formulierung nur mit Feldern** häufig zweckmäßiger
- Wir starten hierfür mit der lokalen **Kraftdichte** \vec{f} in Abhängigkeit von der **Impulsdichte** \vec{p}_V

$$\vec{f} = \frac{d}{dt} \vec{p}_V \quad \vec{F} = \iiint_V \vec{f} dV$$

Kraftdichte

- Wir betrachten die Kraftdichte

$$\vec{f} = \frac{d}{dt} \vec{p}_V = \rho_V (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \rho_V \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

- Durch Einsetzen der Maxwell-Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + (\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \times \vec{B} \\ &= \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} \\ &= \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} - \left[\frac{d}{dt} (\vec{D} \times \vec{B}) - \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \\ &= \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} - \left[\frac{d}{dt} (\vec{D} \times \vec{B}) + \vec{D} \times \operatorname{rot} \vec{E} \right] \\ &= \left[\vec{E} \operatorname{div} \vec{D} - \vec{D} \times \operatorname{rot} \vec{E} \right] + \left[-\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H} \right] - \frac{d}{dt} (\vec{D} \times \vec{B}) \quad \text{alle Materialien} \\ &= \left[\vec{E} \operatorname{div} \vec{D} - \vec{D} \times \operatorname{rot} \vec{E} \right] + \left[\vec{H} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H} \right] - \frac{d}{dt} (\vec{D} \times \vec{B})\end{aligned}$$

Kraftdichte - homogene, lineare, isotrope Medien

- Wir hatten die Kraftdichte

$$\vec{f} = [\vec{E} \operatorname{div} \vec{D} - \vec{D} \times \operatorname{rot} \vec{E}] + [\vec{H} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H}] - \frac{d}{dt} (\vec{D} \times \vec{B}) \quad \text{alle Materialien}$$

$$\vec{f} = \varepsilon [\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E}] + \frac{1}{\mu} [\vec{B} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B}] - \varepsilon \frac{d}{dt} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \text{h, l, i Materialien}$$

- Terme $\vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{a} \rightarrow$ kleiner mathematischer Einschub:

$$\operatorname{grad} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \operatorname{rot} \vec{a} + (\vec{a} \cdot \operatorname{grad}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \operatorname{grad}) \vec{a}$$

$$\operatorname{grad} \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{a})}_{|\vec{a}|^2} = 2(\vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{a}) + 2(\vec{a} \cdot \operatorname{grad}) \vec{a}$$

$$\Rightarrow -\vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} = (\vec{E} \cdot \operatorname{grad}) \vec{E} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} |\vec{E}|^2 \quad \text{für } \vec{B} \text{ analog}$$

- Damit ist die **Kraftdichte in homogenen, linearen, isotropen Medien:**

$$\vec{f} = \varepsilon [\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + (\vec{E} \cdot \operatorname{grad}) \vec{E}] + \frac{1}{\mu} [\vec{B} \operatorname{div} \vec{B} + (\vec{B} \cdot \operatorname{grad}) \vec{B}] - \operatorname{grad} \left[\frac{1}{2} \varepsilon |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu} |\vec{B}|^2 \right] - \varepsilon \frac{d}{dt} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Maxwellscher Spannungstensor

- Um die Kraftdichte einfacher schreiben zu können, führen wir den **Maxwellschen Spannungstensor** \mathbf{T} ein. Der Maxwellsche Spannungstensor ist ein dreidimensionaler Tensor 2. Stufe („ 3×3 -Matrix“):

$$\mathbf{T} = (T_{ij}) \quad \text{mit} \quad T_{ij} = \varepsilon \left[E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} |\vec{E}|^2 \right] + \frac{1}{\mu} \left[B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} |\vec{B}|^2 \right] \quad [T_{ij}] = \text{Nm}^{-2}$$

- Explizit:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \varepsilon E_x E_x + \frac{\mu}{1} B_x B_x & \varepsilon E_x E_y + \frac{\mu}{1} B_x B_y & \varepsilon E_x E_z + \frac{\mu}{1} B_x B_z \\ \varepsilon E_y E_x + \frac{\mu}{1} B_y B_x & \varepsilon E_y E_y + \frac{\mu}{1} B_y B_y & \varepsilon E_y E_z + \frac{\mu}{1} B_y B_z \\ \varepsilon E_z E_x + \frac{\mu}{1} B_z B_x & \varepsilon E_z E_y + \frac{\mu}{1} B_z B_y & \varepsilon E_z E_z + \frac{\mu}{1} B_z B_z \end{pmatrix}$$

$$- \underbrace{\frac{1}{2} \left(\varepsilon |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu} |\vec{B}|^2 \right)}_{\text{Wem}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maxwellscher Spannungstensor und Kraftdichte

- Wir bilden die j-te Komponente der Divergenz von \mathbf{T} :

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} \mathbf{T})_j &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij} = \partial_i T_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_i} E_j + E_i \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_i} B_j + B_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) \right\} - \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial x_j} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial |\vec{B}|^2}{\partial x_j} \right) \\ &= \varepsilon \left[E_j \operatorname{div} \vec{E} + (\vec{E} \cdot \operatorname{grad}) E_j - \frac{1}{2} \operatorname{grad}_j |\vec{E}|^2 \right] + \\ &\quad \frac{1}{\mu} \left[B_j \operatorname{div} \vec{B} + (\vec{B} \cdot \operatorname{grad}) B_j - \frac{1}{2} \operatorname{grad}_j |\vec{B}|^2 \right]\end{aligned}$$

- Dies ist gerade die j-te Komponente der ersten drei Terme der Kraftdichte. Somit:

$$\vec{f} = \operatorname{div} \mathbf{T} - \varepsilon \frac{d}{dt} (\vec{E} \times \vec{B}) = \operatorname{div} \mathbf{T} - \varepsilon \mu \frac{d}{dt} (\vec{E} \times \vec{H}) = \operatorname{div} \mathbf{T} - \varepsilon \mu \frac{d\vec{S}}{dt}$$

- Die Gesamtkraft ist somit:

$$\vec{F} = \oiint_{O(V)} \mathbf{T} \cdot d\vec{A} - \varepsilon \mu \frac{d}{dt} \iiint_V \vec{S} dV$$

Interpretation

$$\vec{F} = \oiint_{O(V)} \mathbf{T} \cdot d\vec{A} - \varepsilon\mu \frac{d}{dt} \iiint_V \vec{S} dV$$

Oberflächenintegral

- Wirkt nur auf die Oberfläche des betrachteten Volumens
- T_{ij} : i -te Komponente (**Wirkrichtung**) der Kraft pro Flächeneinheit (Druck) auf Flächenelement mit Normale \vec{e}_j (**Normalenrichtung**)
- $i = j$: Die Komponenten T_{ii} sind die **Normalspannungskomponenten**, bei denen Normalen- und Wirkrichtung gleich sind.
- $i \neq j$: Die anderen Komponenten sind **Scherspannungskomponenten**, bei den Normalen- und Wirkrichtung unterschiedlich sind.

Volumenintegral

- Verschwindet im stationären Fall → dann Gesamtkraft nur über Oberfläche!
- Mechanik: $\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p}^{\text{mech}}$, $\vec{f} = \frac{d}{dt} \vec{p}_V^{\text{mech}}$
- **Elektromagnetischer Impuls bzw. Impulsdichte**

$$\vec{p}^{\text{em}} = \iiint_V \varepsilon\mu \vec{S} dV$$

$$\vec{p}_V^{\text{em}} = \varepsilon\mu \vec{S}$$

- Wieder Poynting-Vektors! → SRT

Impulserhaltung

- Die Formel für die Kraftdichte kann nun umgeformt werden:

$$\vec{f} = \frac{d}{dt} \vec{p}_V^{\text{mech}} = \text{div } \mathbf{T} - \frac{d}{dt} (\varepsilon \mu \vec{S}) = \text{div } \mathbf{T} - \frac{d}{dt} \vec{p}_V^{\text{em}}$$
$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_V^{\text{mech}} + \varepsilon \mu \vec{S}) = \text{div } \mathbf{T}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_V^{\text{mech}} + \vec{p}_V^{\text{em}}) = \text{div } \mathbf{T}$$

 lokale Impulsbilanz

- Volumenintegration liefert die integrale **Impulsbilanz**:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V (\vec{p}_V^{\text{mech}} + \vec{p}_V^{\text{em}}) dV = \iint_{O(V)} \mathbf{T} \cdot d\vec{A}$$

 integrale Impulsbilanz

- **Strahlungsdruck**: Kepler: Komentenschweife; Maxwell: Normalkomponente und volumetrische Energiedichte; Wellenmodell: Spannungstensor; Teilchenmodell: Planck, Photoelektrischer Effekt, Energie-Impuls-Relation
- Anwendungen: Sonnensegel als Antrieb; zunehmend: Mikromanipulation mit Licht

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektromagnetische Wellen I - Grundlagen

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Ausgangspunkt

- Wir starten mit dem vollständigem Satz der Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{D} = \rho_V & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}$$

- Das Medium sei **linear, homogen, isotrop** $\Rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{D} = \epsilon \vec{E}$

Entkopplung der Maxwell-Gleichungen

- Die Maxwell-Gleichungen können entkoppelt werden:

$$\underbrace{\text{rot rot}}_{\text{grad div} - \Delta} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \vec{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{grad } \frac{\rho_V}{\varepsilon} - \Delta \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad } \frac{\rho_V}{\varepsilon} + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

- Analog für \vec{H} :

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{rot } \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} = \text{rot } \vec{J} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H}$$

$$\text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{H}}_{=0} - \Delta \vec{H} = \text{rot } \vec{J} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} \rightarrow \Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} = -\text{rot } \vec{J}$$

Skalar- und Vektorpotential

- Für die Potentiale ergibt sich analog der früheren Betrachtungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ & & \Leftrightarrow \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \\ & & \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \phi \\ & & \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \end{aligned}$$

- Durch die Definition des **Skalarpotentials** ϕ und des **Vektorpotentials** \vec{A} werden die homogenen Maxwell Gleichungen automatisch erfüllt!

Einsetzen in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

- Wir betrachten die inhomogene Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \rightarrow & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_V & \rightarrow & \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon} \end{aligned}$$

- Einsetzen der Potentiale in das Coulomb-Gauss-Gesetz::

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= -\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\rho_V}{\varepsilon} \\ \Rightarrow \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} &= -\frac{\rho_V}{\varepsilon} \end{aligned}$$

- und in das Durchflutungsgesetz:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{J} + \varepsilon \mu \left[-\operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial t} \phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} \right] \\ \Rightarrow \Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left[\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] &= -\mu \vec{J} \end{aligned}$$

Eichung – Eichtransformation

- **Eichtransformation:** ϕ und \vec{A} können so transformiert werden, dass \vec{E} und \vec{B} unverändert bleiben

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \vec{A} \rightarrow \boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \Lambda} \rightarrow \vec{B}' = \vec{B}$$

→ $\text{div } \vec{A}$ frei wählbar:

$$\text{div } \vec{A}' = \text{div } \vec{A} + \underbrace{\text{div grad } \Lambda}_{\substack{\text{beliebiges Skalarfeld,} \\ \text{da } \Lambda \text{ beliebiges Skalarfeld!}}}$$

- Für das elektrische Feld erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= -\text{grad } \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\text{grad } \phi' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ &= -\text{grad} \left(\phi' + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \stackrel{!}{=} \vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &\Rightarrow \boxed{\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}}\end{aligned}$$

Lorenz Eichung - Strahlungseichung (Coulomb-E.)

- Die **Lorenz Eichung** $\boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0}$ vereinfacht die Gleichungen wesentlich:

$$\Rightarrow \Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\rho_V}{\epsilon} \rightarrow \boxed{\Delta\phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\epsilon}}$$

$$\Delta\vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left[\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = -\mu\vec{J} \rightarrow \boxed{\Delta\vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}}$$

- Damit sind die pDGLen für die Potentiale **entkoppelt!**
- **Strahlungseichung** (Coulomb-Eichung) $\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0}$
- Wenn die Lösung nur fern von Ladungen interessiert kann $\phi = 0$ im Lösungsgebiet angenommen werden. Somit:

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}}$$

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektromagnetische Wellen II - Homogene Wellengleichung

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Ausgangspunkt

- Entkoppelte Gleichungen für Felder und Potentiale in **Lorenzgleichung**:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \text{grad} \frac{\rho_V}{\varepsilon} + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} & \Delta \phi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_V}{\varepsilon} \\ \Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= -\text{rot} \vec{J} & \Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu \vec{J}\end{aligned}$$

- Für $\rho_V = 0$ und $\vec{J} = \vec{0}$ (\rightarrow keine Quellen im Lösungsgebiet) besteht immer die gleiche formale Struktur:

$$\left(\Delta - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Psi = \square \Psi = 0; \square = \Delta - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{Wellenoperator, D'Alembert-O., Quabla}$$

- $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$: Eine Komponente von \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{A} oder ϕ (Potentiale in Lorenz-Eichung)
- Im Vakuum: $\varepsilon \mu = \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ (rel. Fehler $\approx 2 \times 10^{-10}$)

Vakuum-Lichtgeschwindigkeit: $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

- Sonst: $\varepsilon \mu = \frac{1}{v_c^2}$; v_c Lichtgeschwindigkeit im Medium

$$c \geq v_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}; n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \quad \text{Brechungsindex}$$

Homogene Wellengleichung - Ebene Wellen

- Wir betrachten im Folgenden die **Homogene Wellengleichung**

$$\Delta\Psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad \boxed{\Psi(\vec{r}, t) = 0}$$

- Wir suchen und analysieren Lösungen der Wellengleichung
- Zunächst: Lösungen die sich nur in **einer Dimension ausbreiten** → **Ebene Wellen**
- Ansatz:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}); \varphi(\vec{r}, t) = \omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} \quad \text{Phasenfunktion}$$

- Einsetzen in die homogene Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= k^2 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}; \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = \omega^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \quad \vec{k}: \text{Wellenvektor}; \quad k: \text{Wellenzahl} \\ \Rightarrow \left(k^2 - \frac{\omega^2}{v_c^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} &= 0 \\ \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{v_c^2} \rightarrow k_{1,2} = k_{\pm} = \pm \frac{\omega}{v_c} = \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}}{c}; \quad \text{oBdA: } \omega \geq 0 \end{aligned}$$

Homogene Wellengleichung - Ebene Wellen (...)

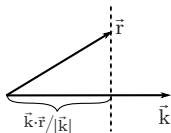
- Für jeden Wert des Parameters ω (**Kreisfrequenz**) gibt es zwei mögliche Werte für die **Wellenzahl** $k = |\vec{k}|$. Die allgemeine Lösung (zum gewählten Ansatz) der homogenen Wellengleichung ist somit

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{\omega} \left(\Psi_+(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}) + \Psi_-(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right); \quad \vec{k} = k \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\omega}{v_c} \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\omega}{v_c} \vec{e}_k$$

- Betrachtung der **Phasenfunktion** $\varphi_{\pm}(\vec{r}, t) = \omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r}$
- Offenbar: $\varphi(\vec{r}, t) = \text{const} \Rightarrow \Psi = \text{const} \rightarrow$ „**Flächen gleicher Phase = Flächen gleicher Werte**“
- Momentaufnahme zum Zeitpunkt $t = t_0$:

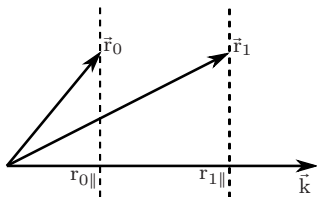
$$\varphi_{\pm}(\vec{r}, t_0) = \omega t_0 \pm \vec{k} \cdot \vec{r} \rightarrow \varphi_{\pm} = \text{const} \Leftrightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$$

- Bedeutung von $\vec{k} \cdot \vec{r}$: $|\vec{k}|$ mal Projektion von \vec{r} auf \vec{k}



- Orte mit $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const} \rightarrow$ Ebenen $\perp \vec{k}$
- Orte, die zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ gleiche Werte Ψ haben, liegen auf Ebenen senkrecht zu \vec{k}
- \rightarrow **ebene Wellenfront** \rightarrow **ebene Wellen**

Homogene Wellengleichung - Ebene Wellen (...)



- Betrachte $t_1 > t_0$ mit gleichem Wert für Ψ :
- Dies sind Orte wiederkehrender Phase:

$$\varphi_0 = \omega t_0 + \vec{k} \cdot \vec{r}_0 \stackrel{!}{=} \omega t_1 + \vec{k} \cdot \vec{r}_1$$

$$\Rightarrow \pm \vec{k} \cdot \vec{r}_1 = \varphi_0 - \omega t_1; \quad \vec{k} \cdot \vec{r}_1 = k r_{1\parallel} \quad \text{mit } r_{1\parallel} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}_1}{k}$$

$$\Rightarrow \pm r_{1\parallel} = \frac{\varphi_0}{k} - \frac{\omega}{k} t_1 \Rightarrow r_{1\parallel} = \pm \frac{\varphi_0}{k} \mp \frac{\omega}{k} t_1$$

- **Lösungen** $(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})$: Wellenfront bewegt sich in Richtung $-\vec{k}$
- **Lösungen** $(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$: Wellenfront bewegt sich in Richtung $+\vec{k}$
- Für die weitere Analyse: $(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$: Wellenfront bewegt sich in Richtung $+\vec{k}$

- **Phasengeschwindigkeit:**

$$v_p = \frac{dr_{\parallel}}{dt} = \frac{\omega}{k} \stackrel{\text{hier}}{=} v_c$$

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektromagnetische Wellen III - Harmonische Ebene Wellen

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Ausgangspunkt

- **Homogene** Wellengleichung $\square\Psi = \left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi = 0$
- Ψ : eine Komponente der Felder bzw. Vektorpotentials oder das Skalarpotential
- **Lorenzgleichung**: $\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$
- **Ebene Wellen** sind Lösungen der Gleichung \rightarrow betrachte nur die **hinlaufende** Lösung für einen Wert von ω

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\varphi_-(\vec{r}, t)) = \Psi(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

- Wir wählen nun eine spezielle Phasenfunktion φ , so dass Ψ einer Funktion mit **harmonischer Zeitabhängigkeit** entspricht:

$$\boxed{\Psi(\vec{r}, t) = \underline{\Psi}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}}; \Psi(\vec{r}, t) = \Re\{\underline{\Psi}(\vec{r}, t)\}$$

Wellenlänge und Frequenz harm. ebener Wellen

$$\underline{\Psi}(\vec{r}, t) = \underline{\Psi}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}; \Psi(\vec{r}, t) = \Re\{\underline{\Psi}(\vec{r}, t)\}$$

- **Fester Zeitpunkt:** Flächen gleicher Werte (= gleicher Phase) haben einen Abstand

$$\Delta \vec{r} \cdot \vec{k} = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

↪ $n = 1 :$

$$\Delta r_{\parallel} \cdot k = 2\pi$$



$$\Delta r_{\parallel} = \frac{2\pi}{k} = \lambda$$

Wellenlänge

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_p}$$



$$v_p = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \lambda = v_c \stackrel{\substack{\varepsilon = \varepsilon_0 \\ \mu = \mu_0}}{=} c$$

- **Fester Ort:** Flächen gleicher Werte wiederholen sich nach einer Zeit

$$\Delta t \omega = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$n = 1 :$

$$\Delta t = T = 2\pi / \omega = 1/f$$

$f :$ **Frequenz**

$\omega :$ **Kreisfrequenz**

$T :$ **Periode**



$$v_p = f \cdot \lambda = v_c \stackrel{\substack{\varepsilon = \varepsilon_0 \\ \mu = \mu_0}}{=} c$$

Lösung für die Felder \vec{E} und \vec{B}

- Ausgangspunkt: Ebene Welle mit harmonischer Zeitabhängigkeit (Kreisfrequenz ω), die in positiver \vec{k} -Richtung propagiert („-“-Lösung)
- Wir nehmen zunächst an, dass \vec{E} und \vec{B} unterschiedliche Kreisfrequenzen und Wellenvektoren haben könnten:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{r})}$$

→ unterschiedliche Frequenzen und Wellenvektoren $\omega, \omega', \vec{k}, \vec{k}'$

- Einsetzen in Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega' \vec{B} \quad \text{andererseits} \quad \text{rot } \vec{E} = -j(\vec{k} \times \vec{E}) \\ \Rightarrow -j(\vec{k} \times \vec{E}_0) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} &\stackrel{!}{=} -j\omega' \vec{B}_0 e^{j(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} \end{aligned}$$

- Soll für alle t und alle \vec{r} gelten:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega', \vec{k} = \vec{k}' \\ \vec{k} \times \vec{E}_0 &= \omega \vec{B}_0 \end{aligned} \right\} \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 \rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}}$$

Lösung für die Felder \vec{E} und \vec{B} (...)

- $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ und \vec{B} in Phase und \vec{B} steht senkrecht auf der von \vec{k} und \vec{E} aufgespannten Ebene:

$$\vec{B}_0 \parallel (\vec{k} \times \vec{E}_0)$$

- Weiter mit Coulomb-Gauß-Gesetz ($\rho_V = 0$) und magnetischer Flusserhaltung:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \curvearrowright \quad \boxed{\vec{k} \perp \vec{E}_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad \curvearrowright \quad \boxed{\vec{k} \perp \vec{B}_0}$$

- Ampèresches Durchflutungsgesetz ($\vec{J} = \vec{0}$)

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow -j\vec{k} \times \vec{B}_0 = j\omega \frac{1}{v_p^2} \vec{E}_0 \rightarrow \vec{E}_0 = -\frac{v_p^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{B}_0$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_0 \parallel (\vec{B}_0 \times \vec{k})}$$

- Offenbar bilden \vec{E} , \vec{B} und \vec{k} ein orthogonales Rechtssystem

Ebene-Welle – TEM-Welle

- Für **harmonische ebene Wellen** bilden \vec{E} , \vec{B} und \vec{k} ein **orthogonales Rechtssystem**:



- Zusammenhang zwischen \vec{B} , \vec{E} und \vec{k} konkret: oBdA wählen wir: $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{E} = (\underline{E}_{0x} \vec{e}_x + \underline{E}_{0y} \vec{e}_y) e^{j(\omega t - kz)}; \quad \underline{E}_{0x}, \underline{E}_{0y} \in \mathbb{C}$$

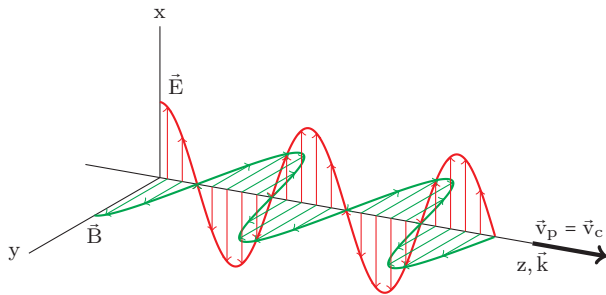
$$\vec{B} = (\underline{B}_{0x} \vec{e}_x + \underline{B}_{0y} \vec{e}_y) e^{j(\omega t - kz)}; \quad \underline{B}_{0x}, \underline{B}_{0y} \in \mathbb{C}$$

- Mit $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ und

$$\vec{E} = \Re\{\underline{\vec{E}}\} = |\underline{E}_{0x}| \vec{e}_x \cos(\omega t - kz + \varphi_x) + |\underline{E}_{0y}| \vec{e}_y \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \quad (\vec{B} \text{ analog})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{v_p} \vec{e}_k \times \vec{E} = \frac{1}{v_p} \vec{e}_z \times \vec{E} = \frac{1}{v_p} (-E_{0y} \vec{e}_x + E_{0x} \vec{e}_y)$$

Ebene-Welle – TEM-Welle



$$v_P = \frac{\omega}{k} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} \stackrel{\text{hier}}{=} v_c$$

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

E = Amplitude des elektrischen Feldes
 B = Amplitude der Magnetflussdichte
 v_P = Phasengeschwindigkeit
 v_c = Lichtgeschwindigkeit im Medium
 c = Vakuum Lichtgeschwindigkeit
 $= 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$

μ_0 = magnetische Permeabilität des Vakuums
 $= 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
 ε_0 = elektrische Permeabilität des Vakuums
 $= 1/\mu_0 c^2 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektromagnetische Wellen IV - Polarisation Ebenen Wellen

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Ausgangspunkt

- Wir betrachten **monochromatische ebene Wellen**, die in $+z$ -Richtung propagieren

$$\vec{E} = (\underline{E}_{0x} \vec{e}_x + \underline{E}_{0y} \vec{e}_y) e^{j(\omega t - kz)} \quad \vec{B} = \frac{1}{v_p} (-\underline{E}_{0y} \vec{e}_x + \underline{E}_{0x} \vec{e}_y) e^{j(\omega t - kz)} \quad v_p = \frac{\omega}{k} \stackrel{\text{hier}}{=} v_c$$

- Hierbei sind:

$\underline{E}_{0x} = |\underline{E}_{0x}| \cdot e^{j\varphi_x}$ komplexe Komponente in x -Richtung bei $t = 0, z = 0$

$\underline{E}_{0y} = |\underline{E}_{0y}| \cdot e^{j(\varphi_x + \delta)}$ dito für y -Komponente

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re\{ \underline{E}(\vec{r}, t) \} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$ Physikalische Lösung

$E_x = |\underline{E}_{0x}| \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$

$E_y = |\underline{E}_{0y}| \cos(\omega t - kz + \varphi_x + \delta)$

φ_x : gemeinsamer Phasenwinkel \rightarrow relativ unwichtig

δ : relative Phase \rightarrow **Fallunterscheidung**

- Fallunterscheidung in drei Spezialfälle (sowie: δ und $|\underline{E}_{0x}|, |\underline{E}_{0y}|$ beliebig):

- $\delta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

- $\delta = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$; $|\underline{E}_{0x}| = |\underline{E}_{0y}| = \hat{E}$

- $\delta = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$; $|\underline{E}_{0x}| \neq |\underline{E}_{0y}|$

1. Fall: Lineare Polarisation

- Wir betrachten: $\delta = z \cdot \pi$, $z \in \mathbb{Z} \rightarrow \delta = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$
- Für den Cosinus gilt die Beziehung

$$\cos(\alpha + \delta) = \pm \cos \alpha \quad ; \quad + : 0, \pm2\pi, \pm4\pi, \dots$$
$$- : \pm\pi, \pm3\pi, \dots$$

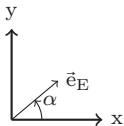
- Hiermit ergibt sich für das elektrische Feld

$$\Rightarrow \vec{E} = \underbrace{(|\underline{E}_{0x}| \vec{e}_x \pm |\underline{E}_{0y}| \vec{e}_y)}_{\text{fester Vektor, orts- und zeitunabhängig}} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

$$= \hat{E} \cdot \vec{e}_E \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \rightarrow \text{linear Polarisiert}$$

$$\hat{E} = |\vec{E}| = \sqrt{|\underline{E}_{0x}|^2 + |\underline{E}_{0y}|^2}$$

- **Polarisationswinkel**



$$\tan \alpha = \pm \frac{|\underline{E}_{0y}|}{|\underline{E}_{0x}|}$$

Allgemeinen Lösung: Überlagerung zweier linear polarisierter Beiträge in x- bzw. y-Richtung.

\Rightarrow Jede beliebige Polarisation ist darstellbar als Überlagerung zweier zueinander senkrechter linearer Polarisationen!

2. Fall: Zirkulare Polarisation

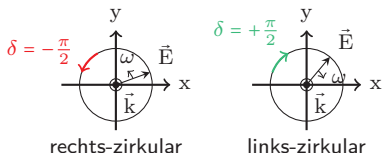
- Wir betrachten: $\delta = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$, $\delta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$; $|E_{0x}| = |E_{0y}| = \hat{E}$
- Für den Cosinus gilt die Beziehung

$$\cos(\alpha + \delta) = \mp \sin \alpha \quad ; \quad + : -\frac{\pi}{2} + m(2\pi) \quad - : +\frac{\pi}{2} + m(2\pi), \quad m \in \mathbb{Z}$$

- Hiermit ergibt sich für das elektrische Feld

$$\vec{E} = \hat{E}(\cos(\omega t - kz + \varphi_x)\vec{e}_x \mp \sin(\omega t - kz + \varphi_x)\vec{e}_y)$$

- Für festes z oder t : Kreis mit Radius $\hat{E} \rightarrow$ **Zirkulare Polarisation**



- **Überlagerung** zweier links und rechts umlaufenden zirkular polarisierter Wellen (unterschiedlicher Amplitude) ergibt wieder eine **beliebig polarisierte Welle**.
- gleiche Amplitude \rightarrow linear polarisiert

3. Fall: Elliptische Polarisation

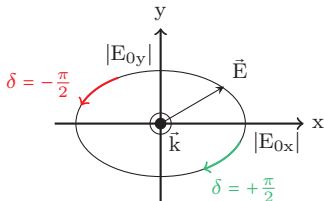
- Wir betrachten: $\delta = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$, $\delta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$; $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$
- Analog zur zirkularen Polarisation folgt für das elektrische Feld

$$E_x = |E_{0x}| \cos(\omega t - kr + \varphi_x)$$

$$E_y = \mp |E_{0y}| \sin(\omega t - kr + \varphi_x)$$

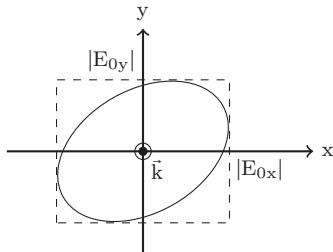
$$\Rightarrow \left[\frac{E_x}{|E_{0x}|} \right]^2 + \left[\frac{E_y}{|E_{0y}|} \right]^2 = 1 \quad \text{Ellipse, Halbachsen } |E_{0x}|, |E_{0y}|$$

- **Elliptisch polarisierte Wellen** (rechts und links umlaufend)



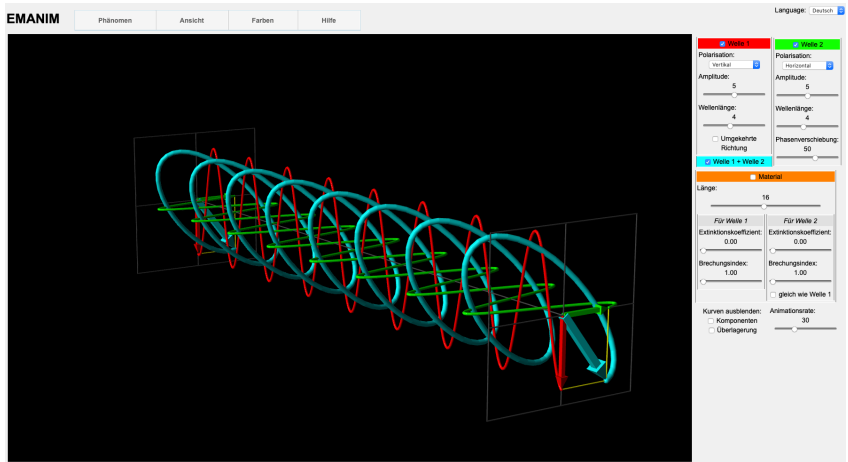
4. Fall: keine Einschränkungen

- Keine Einschränkungen für δ und $|E_{0x}|$ bzw. $|E_{0y}|$
- Analog zur zirkularen Polarisation folgt ohne weitere Herleitung:
 - Ebenfalls **elliptisch polarisiert**
 - aber die Halbachsen sind gegen das x-y-System gedreht



- Eine beliebige Polarisation lässt sich zusammensetzen aus
 - 2 linear polarisierte Wellen, zueinander \perp
 - 2 zirkular polarisierte Wellen, entgegenlaufend

Visualisierung



Szilágyi, András (2019): „EMANIM: Interactive visualization of electromagnetic waves“. Web application available at URL <https://emanim.szialab.org>

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektromagnetische Wellen V - Wellenpakete

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Ausgangspunkt

- Wir suchen Lösungen der homogenen Wellengleichung

$$\square \Psi(\vec{r}, t) = \left(\Delta - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

- Lösungen, die sich nur in einer Richtung (aber hin- und rücklaufend) ausbreiten, haben die allgemeine Form

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{\omega} \left(\Psi_+(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}) + \Psi_-(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right); v_p = \frac{\omega}{k} \stackrel{\text{hier}}{=} v_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

- Eine alternative Schreibweise betrachtet die Überlagerung für verschiedene Wellenvektoren $\vec{k} = k \vec{e}_k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \vec{e}_k$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_0^{\infty} \left[A_+(k) \Psi_+(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}) + A_-(k) \Psi_-(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right] dk$$

polychromatische Welle

- oBdA: $\vec{k} = k \vec{e}_z \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = kz \rightarrow$ Ausbreitung entlang z-Richtung

Dispersion

- In der Regel sind die Materialparameter **frequenzabhängig**:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \qquad \mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 \mu_r(\omega)$$

- Somit haben **Teilwellen unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten**:

$$v_p(\omega) = v_c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)}} = \frac{c}{n(\omega)}$$

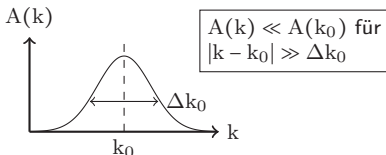
- Dies tritt insbesondere bei **Wellenpaketen** in Erscheinung

Wellenpaket

- Unter einem Wellenpaket mit **harmonischer Zeitabhängigkeit**, das in **+z-Richtung** propagiert, versteht man eine Überlagerung der Form

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(k) e^{j(\omega t - kz)} dk, \text{ mit } \underline{A}(-k) = \underline{A}^*(k)$$

- Häufiger Spezialfall: $\underline{A}(k) = A(k)$ reellwertig mit $A(-k) = A(k)$
- Hierbei soll $A(k)$ zunächst **konzentriert** sein um $k = k_0$:



Taylor-Entwicklung von $\omega(k)$

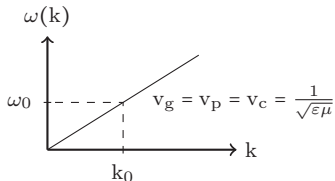
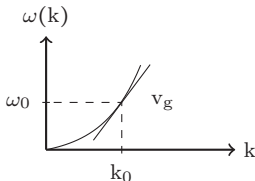
- Da die Wichtungsfunktion $A(k)$ um $k = k_0$ konzentriert ist, bietet sich eine **Taylorentwicklung** von $\omega(k)$ um k_0 an:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \dots$$

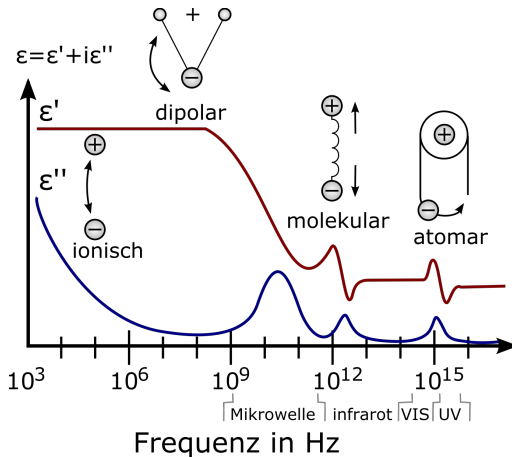
$$\cong \underbrace{\omega(k_0)}_{=\omega_0} + v_g(k - k_0)$$

$$\rightarrow \boxed{v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}} \quad \text{Gruppengeschwindigkeit}$$

- Verlauf von $\omega(k)$ (**Dispersionsrelation**) mit und ohne Dispersion



TET-Einführung → Beiträge zum komplexen ϵ



- Grundsätzlich verschiedenes Verhalten bei vorhandenen oder nicht vorhandenen Rückstellkräften
- dipolar: Polare Moleküle (z.B. Wasser) orientieren sich im Feld, keine Rückstellkraft (nur thermische Bewegung) → Debye-Relaxation
- molekular, atomar: Rückstellkräfte vorhanden → harmonischer Oszillator
- Dielektrische Spektroskopie → Aufklärung der Mechanismen

Quelle: Prof. Kenneth A. Mauritz, derivative work: Cepheiden,
Attribution, via Wikimedia Commons

Taylor-Entwicklung für das Wellenpaket

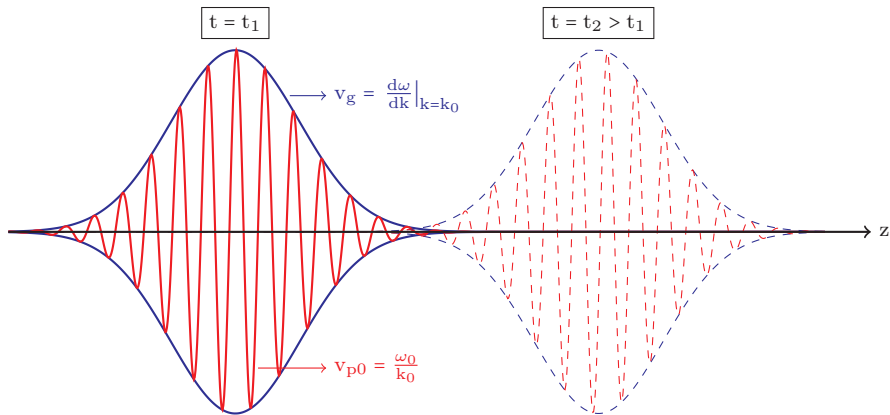
- Taylor-Entwicklung in e-Funktion einsetzen:

$$e^{j(\omega t - kz)} \cong e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} e^{j \overbrace{(k - k_0)(v_g t - z)}^{=q}}$$

- Damit folgt für das Wellenpaket:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &\cong \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{A(k_0 + q)}_{A(k)} e^{jq(v_g t - z)} dq \cdot e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} \\ &\underbrace{\hspace{10em}}_{H(v_g t - z)} \\ &\cong \underbrace{H(v_g t - z)}_{\substack{\text{Einhüllende} \\ \text{propagiert mit } v_g \\ \text{in Richtung } z}} \cdot \underbrace{e^{j(\omega_0 t - k_0 z)}}_{\substack{\text{ebene Welle,} \\ \omega = \omega_0 \\ k = k_0}} \end{aligned}$$

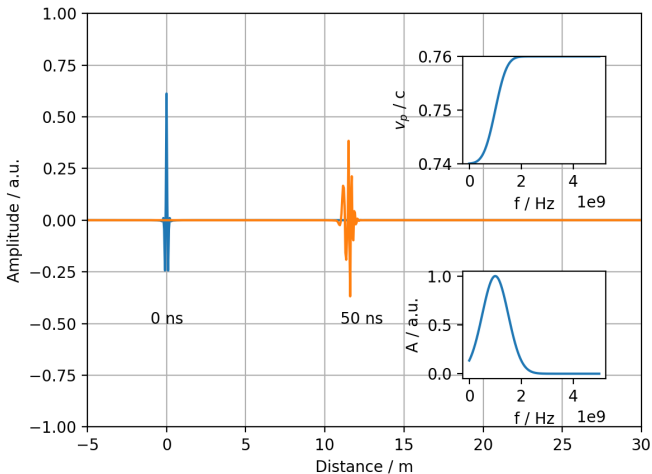
Träger und Form des Wellenpakets



Dispersion eines Wellenpakets

- Wir hatten die Dispersionsrelation $\omega(k)$ um ω_0 nach Taylor bis zur ersten Ordnung entwickelt (**linearisiert**) und so das Wellenpaket mit Einhüllender und Träger erhalten.
- Aus der Herleitung klar: nur sinnvoll, wenn $A(k)$ um k_0 **konzentriert** ist.
- Bei breitbandiger Überlagerung: Das Wellenpaket enthält viele Frequenzanteile, die in der Regel alle mit **unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit** $v_p(\omega)$ propagieren.
- Hierdurch verändert sich die Form der Einhüllenden. Auch dies wird häufig **Dispersion** genannt.
- Dieses **Zerfließen** eines Wellenpakets (Signals) ist eine wichtige Begrenzung beim technischen Einsatz (z.B. Signalübertragung über lange Distanzen in Glasfaser-Kabeln)

Dispersion eines Wellenpakets (Beispiel)



Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektromagnetische Wellen VI - Kugelwellen

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Ausgangspunkt

- Die bisher betrachteten **ebenen Wellen** sind eine sehr wichtige Klasse der Lösungen der **homogenen Wellengleichung**

$$\square \Psi(\vec{r}, t) = \left(\Delta - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = \left(\Delta - \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

- Eine andere ebenso wichtige Klasse von Lösungen sind die **Kugelwellen**.
- Diese werden genutzt (angesetzt), wenn eine **kugelsymmetrische Lösung** dem Problem besser angepasst erscheint.
- Der **Ansatz** ist dann:

$$\Psi(\vec{r}, t) \stackrel{!}{=} \Psi(r, t) \quad \text{mit } r = |\vec{r}|$$

- Für den **Laplace-Operator** in **Kugelkoordinaten** (r, φ, ϑ) gilt dann:

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \Psi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Psi \quad \text{allgemein}$$

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi)$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(r, t)$$

Einsetzen in die Wellengleichung

- Laplace Operator den für kugelsymmetrischen Fall

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi) \quad \text{für } \Psi(\vec{r}, t) = \Psi(r, t)$$

- Einsetzen in die Wellengleichung ergibt:

$$\Delta\Psi(r, t) - \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(r, t) = 0$$
$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi(r, t)) - \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(r, t) = 0$$
$$\curvearrowleft \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (r\Psi(r, t)) = 0$$

- Die Funktion $r\Psi(r, t)$ ist somit Lösung der homogenen eindimensionalen Wellengleichung! → Bekannt aus Block **Ebene Wellen**.

Kugelwellen

- Offenbar kann $r\Psi(r, t)$ dann als Überlagerung der Funktionen Ψ_+ und Ψ_- geschrieben werden:

$$r\Psi(r, t) = \Psi_+(\omega t + kr) + \Psi_-(\omega t - kr) \text{ mit } \omega = kv_p \text{ } (\omega \geq 0)$$

$$\curvearrowright \boxed{\Psi(r, t) = \frac{1}{r} (\Psi_+(\omega t + kr) + \Psi_-(\omega t - kr))}$$

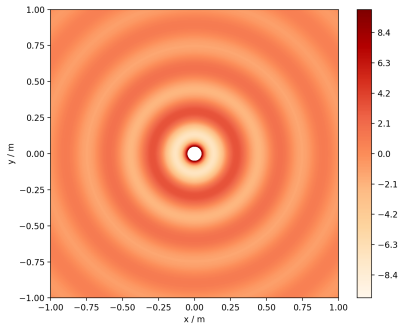
$\Psi_+(\omega t + kr)$ einlaufende Welle

$\Psi_-(\omega t - kr)$ auslaufende Welle

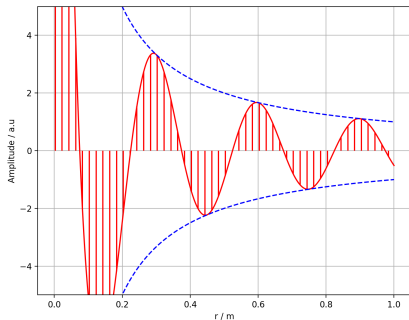
- Wir haben damit eine **neue Klasse** von Lösungen gefunden. Die Eigenschaften sind:
 1. Phase: $\varphi_{\pm} = \omega t \pm kr \rightarrow$ nur abhängig von $r = |\vec{r}| \Rightarrow$ **Die Phasenflächen sind Kugelflächen**
 2. Amplitude: $\propto \frac{1}{r}$
 3. Für **harmonische Zeitabhängigkeit**: $\underline{\Psi}_{\pm} = \frac{1}{r} \underline{A}_{\pm} e^{j(\omega t \pm kr)}$ \curvearrowright Kugelwellen im engeren Sinne
 4. Phasengeschwindigkeit: $v_p = \mp \frac{\omega}{k} = \mp \frac{c}{n} = v_c$
 5. Abstand von Flächen gleicher Phase (Wellenlänge): $k\lambda = 2\pi$

Kugelwellen – Visualisierung

Spherical Wave: $f = 1 \text{ GHz}$, $v_p = c$, Time: 0.00 ns



Ebene durch Ursprung



Amplitude entlang Radialrichtung

- Divergenz bei $r = 0$ ausgeblendet
- Phasenflächen = Kugelschalen
- hier: nur auslaufende Lösung

- Einhüllende $\propto 1/r$
- hier: $v_p = c \rightarrow 1 \text{ ns} \approx 33 \text{ cm}$
- Bisher nur eine Größe; z.B. nur E-Feld

Betrachtung der Felder

- Formal haben Lösungen der homogenen Wellengleichung für elektrisches Feld und magnetische Flussdichte die **gleiche Form**.
- Aber natürlich sind die Größen weiterhin über die Maxwell-Gleichungen miteinander **verkoppelt**
- Es sind $\vec{\underline{E}}$ und $\vec{\underline{B}}$ gegeben durch

$$\vec{\underline{E}}(\mathbf{r}, t) = \vec{\underline{E}}_0 \frac{1}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad \text{und} \quad \vec{\underline{B}}(\mathbf{r}, t) = \vec{\underline{B}}_0 \frac{1}{r} e^{j(\omega t - kr)}$$

- Dann folgt wegen $\text{div } \vec{\underline{E}} = 0$ und $\text{div } \vec{\underline{B}} = 0$ z.B. für das elektrische Feld:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\underline{E}} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \vec{\underline{E}}_0 \frac{1}{r} e^{j(\omega t - kr)} \right) \cdot \vec{e}_r \quad \rightarrow \text{Was passiert mit den anderen Summanden?} \\ &= (\vec{\underline{E}}_0 \cdot \vec{e}_r) \frac{1}{r^2} e^{j(\omega t - kr)} (1 - jkr) \stackrel{!}{=} 0 \text{ für alle } k \text{ und } r \end{aligned}$$

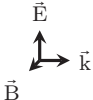
$$\Rightarrow \boxed{\vec{\underline{E}} \perp \vec{r}} \quad \text{und analog} \quad \boxed{\vec{\underline{B}} \perp \vec{r}} \Rightarrow \text{beide transversal!}$$

Betrachtung der Felder (...)

- Wir nutzen das Induktionsgesetz

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \text{ bzw. } -jk (\vec{e}_r \times \vec{E}) = -j\omega \vec{B}$$

- Hiermit folgt unmittelbar, dass es sich (lokal) wieder um eine **TEM-Welle** handelt:

$$\vec{B} = -\frac{k}{\omega} (\vec{E} \times \vec{e}_r) = -\frac{1}{v_p} (\vec{E} \times \vec{e}_r) = -\frac{1}{v_p} (\vec{E} \times \vec{e}_k)$$


- Für viele Anwendungen wichtig ist der **Wellenwiderstand**:

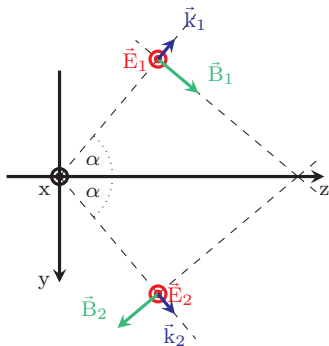
$$\underline{Z} = \frac{E_0}{H_0} = \frac{\mu E_0}{B_0} = \mu v_p = \mu v_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{hier: reel; allgemein: komplex}$$

- **Wellenwiderstand des Vakuums:**

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c \approx 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$$

TE und TM-Wellen

- Ebene Wellen, Kugelwellen: TEM-Wellen → Aber das ist nicht immer so!
- Betrachten nun: Überlagerung zweier ebener Wellen gleicher Frequenz, Amplitude und Phasenlage, die sich in **unterschiedlicher Richtung** ausbreiten.



$$\underline{\vec{E}}_1 = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} = \underline{E}_0 \vec{e}_x e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} \quad \text{und}$$

$$\underline{\vec{B}}_1 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \underline{\vec{E}}_1 = \frac{1}{v_c} (\vec{e}_{k_1} \times \underline{\vec{E}}_0 e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}) e^{j\omega t}, \quad v_c = v_p$$

$$\underline{\vec{E}}_2 = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} = \underline{E}_0 \vec{e}_x e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \quad \text{und}$$

$$\underline{\vec{B}}_2 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \underline{\vec{E}}_2 = \frac{1}{v_c} (\vec{e}_{k_2} \times \underline{\vec{E}}_0 e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}) e^{j\omega t}$$

$$-\vec{k}_1 = -k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z \quad \text{und} \quad \vec{k}_2 = k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z, \quad v_c = v_p$$

- **Überlagerung** der beiden Wellen:

$$\underline{\vec{E}} = 2\underline{E}_0 \cos(k_y y) \vec{e}_x e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{2\underline{E}_0}{k v_c} (k_z \cos(k_y y) \vec{e}_y + j k_y \sin(k_y y) \vec{e}_z) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

- **TE-Welle**, Propagation in z-Richtung (H-Wellen)
analog: **TM-Wellen** (E-Welle)

TE und TM-Wellen – Phasengeschwindigkeit

- Phasengeschwindigkeit: $v_p = \frac{\omega}{k_z}$; k_z weil Ausbreitung in z-Richtung
- Für die einzelnen Wellen gilt $v_c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} \Rightarrow k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_c^2} - k_y^2}$
- Hiermit folgt für die Phasengeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{v_c^2} - k_y^2}} \\ &= \frac{\omega}{\frac{\omega}{v_c} \sqrt{1 - \frac{k_y^2 v_c^2}{\omega^2}}} = \frac{v_c}{\sqrt{1 - \frac{k_y^2 v_c^2}{\omega^2}}} \geq v_c \end{aligned}$$

- Die Phasengeschwindigkeit ist hier also mindestens so groß wie die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium
- Im Vakuum kann die Phasengeschwindigkeit somit **größer als die Lichtgeschwindigkeit** sein!
- Mehr zu TE- und TM-Wellen → **Hohlleiter**

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektromagnetische Wellen VII - Allgemeine Lösung

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Ausgangspunkt

- Wir suchen die **allgemeine Lösung** $\Psi(\vec{r}, t)$ der **homogenen Wellengleichung** mit **Anfangswerten** $\Psi_0(\vec{r})$ und $\dot{\Psi}_0(\vec{r})$:

$$\square \Psi(\vec{r}, t) = \left(\Delta - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = \left(\Delta - \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

$$\Psi(\vec{r}, t = 0) = \Psi_0(\vec{r}) \text{ vorgegeben}$$

$$\left. \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{\Psi}_0(\vec{r}) \text{ vorgegeben}$$

- Diese allgemeine Lösung lässt sich durch **Fourier-Transformation** der partiellen Differentialgleichung finden.

Fourier-Transformation

Definition

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine integrierbare Funktion ($f \in L^1(\mathbb{R}^n)$). Dann ist die **Fourier-Transformierte** \mathcal{F} von f definiert durch

$$(\mathcal{F}f)(\vec{y}) = \tilde{f}(\vec{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-j\vec{x} \cdot \vec{y}} d^n x.$$

Die **Rücktransformation** \mathcal{F}^{-1} ist dann

$$f(\vec{x}) = (\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(\vec{y}))(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\vec{y}) e^{j\vec{x} \cdot \vec{y}} d^n y.$$

- Produkt der Faktoren bei Hin- und Rücktransformation muss $\frac{1}{(2\pi)^n}$ ergeben und die Vorzeichen der Exponentialfunktionen sind unterschiedlich!
- Konvention: Für das Paar $t \leftrightarrow \omega$ wird das jeweils entgegengesetzte Vorzeichen in der Exponentialfunktion verwendet.
- Wichtige Regeln: **Faltungssatz**, **Verschiebungssatz**, **Darstellung der δ -Funktion**

Zurück zur allgemeinen Lösung

- Wir suchen die **allgemeine Lösung** $\Psi(\vec{r}, t)$ der **homogenen Wellengleichung** mit **Anfangswerten** $\Psi_0(\vec{r})$ und $\dot{\Psi}_0(\vec{r})$:

$$\square \Psi(\vec{r}, t) = \left(\Delta - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = \left(\Delta - \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

$$\Psi(\vec{r}, t = 0) = \Psi_0(\vec{r}) \text{ vorgegeben}$$

$$\left. \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{\Psi}_0(\vec{r}) \text{ vorgegeben}$$

- Die Fourier-Transformierte der noch unbekanntenen Lösung sei $\tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega)$
- Hiermit schreiben wir $\Psi(\vec{r}, t)$ als **Überlagerung ebener Wellen** mit beliebigen Wellenvektoren \vec{k} und Kreisfrequenzen ω

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\omega d^3k$$

- Achtung: Wegen der Überlagerung zu beliebigen Ausbreitungsrichtungen ist die Lösung im allgemeinen **keine ebene Welle**.

Einsetzen in die Wellengleichung

- Die Schreibweise als 4-dimensionale Fouriertransformierte erlaubt es, die Ableitungen explizit auszuführen:

$$\Delta e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = -k^2 e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = -\omega^2 e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

- Die homogene Wellengleichung schreibt sich damit in der Form

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{v_c^2} \right) \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d\omega d^3k = 0$$

- Dies kann aber allgemein nur erfüllt werden, wenn gilt

$$\left(\frac{\omega^2}{v_c^2} - k^2 \right) \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) = 0$$

- Durch den Übergang zur Fourier-Transformierten erhalten wir eine zur homogenen Wellengleichung **äquivalente algebraische Gleichung!**
- Offenbar ist die bereits vorher gefundene Beziehung

$$\omega = \pm v_c k$$

eine allgemeingültige Beziehung im Kontext der homogenen Wellengleichung.

Darstellung als 3D-Fourier-Transformierte

- Den bisher eingeschlagenen Weg könnte man problemlos weitergehen und würde eine allgemeine Lösung der Wellengleichung zu den Anfangswerten finden.
- Um eine **bestimmte Formulierung** zu finden variieren wir den Ansatz auf der Basis der gewonnenen Erkenntnis $\omega = \pm v_c k$.
- Da ω und k voneinander abhängig sind, reicht auch eine 3D-Fourier-Transformierte:

$$\tilde{\Psi}(\vec{k}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi(\vec{r}, t) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r \quad \text{Hintransformation}$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \tilde{\Psi}(\vec{k}, t) e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k \quad \text{Rücktransformation}$$

- Transformation der Anfangswerte:

$$\tilde{\Psi}_0(\vec{k}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi_0(\vec{r}) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r \quad \text{und} \quad \tilde{\dot{\Psi}}_0(\vec{k}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \dot{\Psi}_0(\vec{r}) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r$$

Einsetzen in homogene Wellengleichung

- Einsetzen in die homogene Wellengleichung ergibt:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(-k^2 - \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{\Psi}(\vec{k}, t) e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k = 0$$

- Dies führt auf ein einfaches Anfangswertproblem für $\tilde{\Psi}(\vec{k}, t)$:

$$\left(\frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 \right) \tilde{\Psi}(\vec{k}, t) = 0; \quad \tilde{\Psi}(\vec{k}, 0) = \tilde{\Psi}_0(\vec{k}), \quad \dot{\tilde{\Psi}}(\vec{k}, 0) = \dot{\tilde{\Psi}}_0(\vec{k})$$

- Allgemeine Lösung: $\tilde{\Psi}(\vec{k}, t) = A(\vec{k}) \cos(kv_c t) + B(\vec{k}) \sin(kv_c t)$

- Konstanten: $\tilde{\Psi}(\vec{k}, 0) = \tilde{\Psi}_0(\vec{k}) = A(\vec{k})$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}(\vec{k}, t) \Big|_{t=0} = kv_c B(\vec{k}) = \dot{\tilde{\Psi}}_0(\vec{k}) \rightarrow B(\vec{k}) = \frac{\dot{\tilde{\Psi}}_0(\vec{k})}{kv_c}$$

Einsetzen in die Rücktransformation

- Einsetzen in die Rücktransformation ergibt die **allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung** mit **Anfangswerten**:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left[\tilde{\Psi}_0(\vec{k}) \cos(kv_c t) + \tilde{\dot{\Psi}}_0(\vec{k}) \frac{\sin(kv_c t)}{kv_c} \right] e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k \text{ mit}$$

$$\tilde{\Psi}_0(\vec{k}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi_0(\vec{r}) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r \text{ und } \tilde{\dot{\Psi}}_0(\vec{k}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \dot{\Psi}_0(\vec{r}) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r$$

- Diese allgemeine Lösung kann noch etwas umgeschrieben werden, um Eigenschaften leichter ablesen zu können.
- Offenbar gilt: $\cos(kv_c t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin(kv_c t)}{kv_c} \right)$
- Außerdem können wir $\mathbf{R}(t) = \mathbf{v}_c t$ interpretieren als den **Weg, den eine einzelne Wellenfront seit $t = 0$ zurückgelegt hat**. Es kann ersetzt werden: $v_c = \frac{R(t)}{t}$.
- Weiterhin rechnet man leicht aus (K_R : Kugel mit Radius R):

$$\frac{\sin kR}{kR} = \frac{1}{4\pi R^2} \iiint_{O(K_R)} e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} d^2r' = \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

Kirchhoffsche Lösung

- Einsetzen der Beziehungen vereinfacht den Ausdruck und liefert die **Kirchhoffsche Lösung** der homogenen Wellengleichung mit Anfangswerten:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi R^2} \oiint_{O(K_R)} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \tilde{\Psi}_0(\vec{k}) e^{j\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{r}')} d^3k \right\} d^2r' \right] + \left[\frac{t}{4\pi R^2} \oiint_{O(K_R)} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \tilde{\Psi}_0(\vec{k}) e^{j\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{r}')} d^3k \right\} d^2r' \right]$$

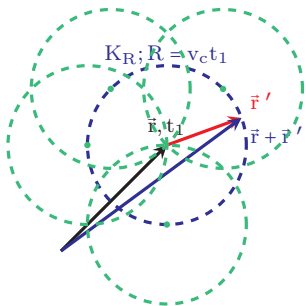
- Der finale Ausdruck für die **Kirchhoffsche Lösung** ist somit

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi R^2(t)} \oiint_{O(K_{R(t)})} \Psi_0(\vec{r} + \vec{r}') d^2r' \right] + \left[\frac{t}{4\pi R^2(t)} \oiint_{O(K_{R(t)})} \dot{\Psi}_0(\vec{r} + \vec{r}') d^2r' \right]$$

Interpretation - Huygens-Fresnelsches Prinzip

Kirchhoffsche-Lösung:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi R^2(t)} \iint_{O(K_R(t))} \Psi_0(\vec{r} + \vec{r}') d^2 r' \right] + \left[\frac{t}{4\pi R^2(t)} \iint_{O(K_R(t))} \dot{\Psi}_0(\vec{r} + \vec{r}') d^2 r' \right]$$



Huygens-Fresnelsches Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen Welle, der so genannten **Elementarwelle**. Die Elementarwelle hat die gleiche Frequenz und Ausbreitungsgeschwindigkeit wie die Primärwelle. Die neue Wellenfront ergibt sich durch phasenrichtige Addition – **Superposition** – sämtlicher Elementarwellen. Im dreidimensionalen Raum breiten sich die Elementarwellen **kugelförmig** aus.

Analyse rücklaufenden Elementarwelle: David A. B. Miller, „Huygens's wave propagation principle corrected“, Optics Letters 16(18), 1370, 1991.

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektromagnetische Wellen VIII - Energie und Impuls

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Energiedichte

- Wir betrachten ebene Wellen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad ; \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\text{mit } \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0) \curvearrowright |\vec{B}_0|^2 = \frac{1}{v_c^2} |\vec{E}_0|^2 \quad v_c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{\omega}{k} = v_p$$

- Beliebige veränderliche Felder - Energieerhaltung: **Komplexen Poyntingschen Satz** bei harmonischer Zeitabhängigkeit.
- Energiedichte (Mittelwerte über eine Periodendauer):

$$\langle w_{em}(\vec{r}, t) \rangle = \langle w_e(\vec{r}, t) \rangle + \langle w_m(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{4} \Re \left\{ \vec{H}_0 \cdot \vec{B}_0^* + \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0^* \right\}$$

- Elektrischer Anteil von $\langle w_{em} \rangle$: $\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \Re \left\{ \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0^* \right\} = \frac{1}{4} \epsilon |\vec{E}_0|^2$
- Magnetischer Anteil von $\langle w_{em} \rangle$: $\langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \Re \left\{ \vec{H}_0 \cdot \vec{B}_0^* \right\} = \frac{1}{4} \frac{1}{\mu} |\vec{B}_0|^2 = \frac{1}{4} \epsilon |\vec{E}_0|^2$
- Elektrischer und magnetischer Anteil der Welle enthalten gleiche Energieanteile. Die gesamte Energiedichte ist

$$\langle w_{em}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} |\vec{B}_0|^2$$

Energieflussdichte - Poyntingscher Vektor

- Energieflussdichte, Poynting-Vektor (Mittelwerte über eine Periodendauer):

$$\begin{aligned}\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle &= \frac{1}{2} \Re \left\{ \vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \frac{1}{\omega} \Re \left\{ \vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{E}_0^*) \right\} \\ &= \frac{1}{2\omega\mu} \Re \left\{ \vec{k} |\vec{E}_0|^2 - \vec{E}_0^* \underbrace{(\vec{E}_0 \cdot \vec{k})}_{=0} \right\}, \quad v_P = v_c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \curvearrowright \frac{1}{\omega} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{k} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}_0|^2 \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}_0|^2 \vec{e}_k = \underbrace{v_P}_{=v_c=v_g} \langle w_{em} \rangle \vec{e}_k = \frac{1}{2} \frac{1}{Z} |\vec{E}_0|^2 \vec{e}_k\end{aligned}$$

- Energiefluss in Ausbreitungsrichtung der Welle.

Impulsdichte

- Beliebig veränderliche Felder - Impulserhaltung: Die elektromagnetische Impulsdichte ist gegeben durch:

$$\vec{p}_V^{\text{em}} = \varepsilon\mu\vec{S} = \frac{1}{v_p} v_p \langle w_{\text{em}} \rangle \vec{e}_k = \frac{1}{v_c} \langle w_{\text{em}} \rangle \vec{e}_k$$

- Im Rahmen der **Speziellen Relativitätstheorie** (SRT) wird folgende **allgemeine Energie-Impulsgleichung** für das Vakuum ($v_c = c$) gefunden

$$\boxed{W^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4} \quad ; \quad \text{ruhende Masse: } W = mc^2$$

- Für ein **masseloses Teilchen** ergibt sich genau die Beziehung der elektromagnetischen (ebenen) Welle!

$$\boxed{W = cp}$$

- ↪ **Welle-Teilchen-Dualismus** ↪ **Photon** ↪ **Photoelektrischer-Effekt** ↪
Quantenmechanik (nicht SRT konform) ↪ **relativistische Quantenfeldtheorie,**
Quantenelektrodynamik (QED)

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektromagnetische Wellen IX - Leitende Medien

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Ausgangspunkt

- Bisher hatten wir sowohl die Ladungsträgerdichte ρ_V als auch die Stromdichte \vec{J} als identisch Null angenommen.
- Dies entspricht der **Ausbreitung in isolierende Dielektrika** (und ohne weitere Quellen).
- Für die **Anwendung wichtig** sind aber auch **Wellenausbreitungen in leitfähigen (verlustbehafteten) Medien**
- In diesem Fall sind das elektrische Feld \vec{E} und die (Leitungs-) Stromdichte \vec{J} über die elektrische Leitfähigkeit κ miteinander verknüpft (**lokales Ohmsches Gesetz**, vgl.: Elektrisches Strömungsfeld):

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}$$

- Nimmt man weiterhin neutrale – $\rho_V = 0$ – sowie homogene, isotrope und lineare Medien an, so lauten die Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu\kappa \vec{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

- Diese Gleichungen können wieder wie üblich ($\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dots = \operatorname{grad} \operatorname{div} \dots - \Delta \dots$) entkoppelt werden.

Telegraphen-Gleichungen

- Die entkoppelten Maxwellgleichungen sind die **Telegraphen-Gleichungen**, die für $\kappa \rightarrow 0$ in die Wellengleichungen übergehen:

$$\left[\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{E}(\vec{r}, t) = \left[\square - \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$
$$\left[\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{B}(\vec{r}, t) = \left[\square - \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

- Wie schon im Falle der Wellengleichung können wir uns für die Analyse auf eine Feldkomponente beschränken, die wir $\Psi(\vec{r}, t)$ nennen.
- Wir betrachten den Fall **harmonischer Zeitabhängigkeit**

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Re\{\underline{\Psi}(\vec{r}, t)\} \quad \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = \underline{\Psi}_0(\vec{r})e^{j\omega t} \quad \frac{\partial}{\partial t}\underline{\Psi} = j\omega\underline{\Psi} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{\Psi} = -\omega^2\underline{\Psi}$$

- Die Telegraphen-Gleichung lautet dann

$$\boxed{[\Delta + \omega^2\varepsilon\mu - j\omega\mu\kappa] \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = 0}$$

Komplexe Permittivität und Geschwindigkeit

- Die Telegraphen-Gleichung bei harmonischer Zeitabhängigkeit kann leicht in die bekannte Form der Wellengleichung überführt werden:

$$[\Delta + \omega^2 \varepsilon \mu - j \omega \mu \kappa] \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = \left[\Delta + \omega^2 \mu \left(\varepsilon - j \frac{\kappa}{\omega} \right) \right] \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\left[\Delta + \omega^2 \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - j \frac{\kappa}{\varepsilon_0 \omega} \right) \right] \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \mu_r \right] \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = \left[\Delta + \frac{\omega^2}{v_c^2} \right] \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = 0$$

- Hierbei wurde die **komplexe Permittivität** $\underline{\varepsilon}_r$ eingeführt:

$$\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_r' + j \varepsilon_r'' = \varepsilon_r - j \frac{\kappa}{\varepsilon_0 \omega} = |\underline{\varepsilon}_r| e^{j\varphi} ; |\underline{\varepsilon}_r| = \sqrt{\varepsilon_r'^2 + \frac{\kappa^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}} ; \tan \varphi = -\frac{\kappa}{\varepsilon_0 \varepsilon_r' \omega}$$

- Es ergibt sich auch die **komplexe Ausbreitungsgeschwindigkeit** \underline{v}_c

$$\underline{v}_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{\varepsilon} \underline{\mu}}}$$

Komplexer Wellenvektor und Brechungsindex

- Die Lösung der Telegraphen-Gleichung bei harmonischer Zeitabhängigkeit folgt direkt aus der Lösung der Wellengleichung:

$$\underline{\Psi}(\vec{r}, t) = \underline{\Psi}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

- Hierbei ist \vec{k} der **komplexe Wellenvektor**, der sich aus der komplexen Ausbreitungsgeschwindigkeit ergibt:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{\underline{v}_c} \vec{e}_k = \omega \sqrt{\underline{\epsilon} \underline{\mu}} \vec{e}_k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\underline{\epsilon}_r \underline{\mu}_r} \vec{e}_k = \frac{\omega}{c} \underline{n} \vec{e}_k$$

- Hierbei wurde der **komplexe Brechungsindex** \underline{n} eingeführt:

$$\underline{n} = \sqrt{\underline{\epsilon}_r \underline{\mu}_r} = n' - j\gamma \text{ mit}$$

$$n' = n \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\epsilon_0 \epsilon_r \omega}\right)^2}} \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} n \text{ verallg. Brechungsindex}$$

$$\gamma = n \cdot \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\epsilon_0 \epsilon_r \omega}\right)^2}} \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} 0 \text{ Extinktionskoeffizient}$$

Lösung für die Felder

- Setzt man die gefundene Lösung z.B. für das elektrische Feld ein ergibt sich:

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) &= \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ &= \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c} n \vec{e}_k \cdot \vec{r})} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c} (n' - j\gamma) \vec{e}_k \cdot \vec{r})} \\ &= \underline{\vec{E}}_0 e^{-\frac{\omega}{c} \gamma \vec{e}_k \cdot \vec{r}} e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c} n' \vec{e}_k \cdot \vec{r})} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-k'' \vec{e}_k \cdot \vec{r}} e^{j(\omega t - k' \vec{e}_k \cdot \vec{r})}\end{aligned}$$

- Dies beschreibt eine **gedämpfte Welle** in Richtung \vec{e}_k mit **Eindringtiefe** $\delta = c/\omega\gamma$.
- Die **Phasengeschwindigkeit** liest man aus dem Wellenterm ab:

$$v_p = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'} \leq \frac{c}{n} \quad \text{maximal für } \kappa = 0$$

- Für die magnetische Flussdichte

$$\underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

folgt analog zu den früheren Herleitungen:

$$\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0, \quad \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{B}} = 0, \quad \frac{\underline{\vec{k}}}{\omega} \vec{e}_k \times \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{B}} = \frac{1}{c} (n' - j\gamma) \vec{e}_k \times \underline{\vec{E}} \quad \text{TEM, nicht in Phase}$$

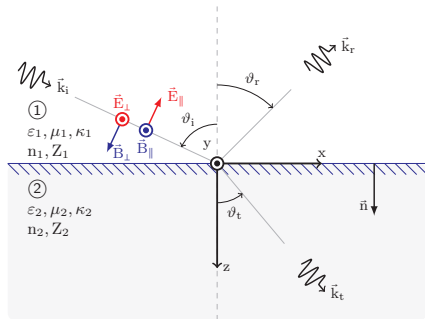
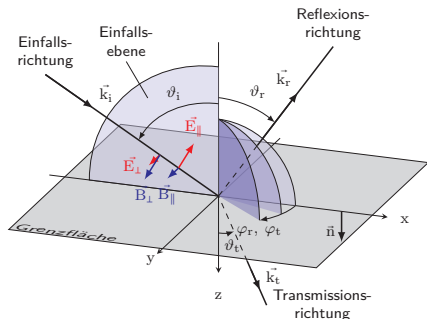
Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektromagnetische Wellen X - Reflexion und Brechung

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Ausgangspunkt



- **Linear polarisierte ebene Welle** am Übergang zweier Medien (hom., isotrop, linear)
- Wellenvektor der einfallenden Welle \vec{k}_i und Normalenvektor der Grenzfläche \vec{n} spannen die **Einfallsebene** auf. OBdA: $\vec{n} = \vec{e}_z$
- Indizes: i - inzident, r - reflektiert, t - transmittiert
- Zwei Fälle: (1) $\perp \rightarrow \vec{E}_i \perp$ zur Einfallsebene (**senkrechte Polarisation**, „horizontal“)
- (2) $\parallel \rightarrow \vec{E}_i$ in der Einfallsebene (**parallele Polarisation**, „vertikal“)
- Zunächst unbekannt: (1) $\omega_i = \omega_r = \omega_t$? (2) $\varphi_r = \varphi_t = 0$? (3) $\vartheta_i = \vartheta_r$?

Charakterisierung der Wellen

- Wir gehen von harmonischer Zeitabhängigkeit aus:

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_i(\vec{r}, t) &= \underline{\vec{E}}_{0i} e^{j(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} & \underline{\vec{B}}_i(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\omega_i} (\vec{k}_i \times \underline{\vec{E}}_i(\vec{r}, t)) \\ \underline{\vec{E}}_r(\vec{r}, t) &= \underline{\vec{E}}_{0r} e^{j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} & \underline{\vec{B}}_r(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\omega_r} (\vec{k}_r \times \underline{\vec{E}}_r(\vec{r}, t)) \\ \underline{\vec{E}}_t(\vec{r}, t) &= \underline{\vec{E}}_{0t} e^{j(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} & \underline{\vec{B}}_t(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\omega_t} (\vec{k}_t \times \underline{\vec{E}}_t(\vec{r}, t))\end{aligned}$$

- Allgemeine Beziehung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern bei ebenen Wellen

$$\begin{aligned}\underline{\vec{B}} &= \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \underline{\vec{E}}) = \frac{k}{\omega} (\vec{e}_k \times \underline{\vec{E}}) = \frac{1}{v_p} (\vec{e}_k \times \underline{\vec{E}}) = \sqrt{\varepsilon\mu} (\vec{e}_k \times \underline{\vec{E}}) \\ \underline{\vec{H}} &= \frac{1}{\mu} \underline{\vec{B}} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\varepsilon\mu} (\vec{e}_k \times \underline{\vec{E}}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\vec{e}_k \times \underline{\vec{E}}) = \frac{1}{Z} (\vec{e}_k \times \underline{\vec{E}}) \\ \underline{\vec{E}} &= -Z (\vec{e}_k \times \underline{\vec{H}})\end{aligned}$$

Kreisfrequenzen ω_i , ω_r und ω_t

- Abschnitt „Verhalten an Grenzflächen“: Für Normalenvektor \vec{n} von ① nach ②:

$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$	Tangentialkomponente von \vec{E} stetig
$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_F$	Normalkomponente von \vec{D} unstetig
$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_A$	Tangentialkomponente von \vec{H} unstetig
$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$	Normalkomponente von \vec{B} stetig

- Betrachte Tangentialkomponente von \vec{E} . Für $z = 0$ muss gelten:

$$\vec{n} \times \left(\underline{\vec{E}}_{0t} e^{j(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} - \left(\underline{\vec{E}}_{0i} e^{j(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + \underline{\vec{E}}_{0r} e^{j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \right) \right) \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

- Für beliebige Zeitpunkte $t \neq 0$ und $\vec{r} = \vec{0}$ kann dies nur erfüllt werden, wenn gilt

$$e^{j\omega_i t} = e^{j\omega_r t} = e^{j\omega_t t} \Rightarrow \boxed{\omega_i = \omega_r = \omega_t} \quad \rightarrow \text{Keine Änderung der Frequenz!}$$

Wellenvektoren \vec{k}_r und \vec{k}_t in Einfallsebene

- Im gewählten Koordinatensystem gilt

$$\vec{k}_i = k_i (\sin \vartheta_i \vec{e}_x + \cos \vartheta_i \vec{e}_z)$$

$$\vec{k}_r = k_r (\cos \varphi_r \sin \vartheta_r \vec{e}_x + \sin \varphi_r \sin \vartheta_r \vec{e}_y - \cos \vartheta_r \vec{e}_z)$$

$$\vec{k}_t = k_t (\cos \varphi_t \sin \vartheta_t \vec{e}_x + \sin \varphi_t \sin \vartheta_t \vec{e}_y + \cos \vartheta_t \vec{e}_z)$$

- Betrachte Punkt auf der Grenzfläche ($z = 0$): $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = k_i x \sin \vartheta_i$$

$$\vec{k}_r \cdot \vec{r} = k_r (x \cos \varphi_r \sin \vartheta_r + y \sin \varphi_r \sin \vartheta_r)$$

$$\vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_t (x \cos \varphi_t \sin \vartheta_t + y \sin \varphi_t \sin \vartheta_t)$$

- Für $t = 0$ muss für x - und y -Komponente gelten ($e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} = e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}}$):

$$x: k_i \sin \vartheta_i = k_r \cos \varphi_r \sin \vartheta_r = k_t \cos \varphi_t \sin \vartheta_t \quad y: 0 = k_r \sin \varphi_r \sin \vartheta_r = k_t \sin \varphi_t \sin \vartheta_t$$

- Aus der y -Komponente folgt für $\vartheta_r \neq 0$ und $\vartheta_t \neq 0$: $\varphi_r = \varphi_t = 0$ (r und t in EFE)

Reflexions- und Brechungsgesetz

- Die Bedingung für die x-Komponente vereinfacht sich damit zu

$$k_i \sin \vartheta_i = k_r \sin \vartheta_r = k_t \sin \vartheta_t$$

- Die Beträge der Wellenvektoren sind durch die Materialien bestimmt:

$$k_i = k_r = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\omega}{v_{c1}} = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{r1} \mu_{r1}} = \frac{\omega}{c} n_1 = k_1$$
$$k_t = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\omega}{v_{c2}} = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{r2} \mu_{r2}} = \frac{\omega}{c} n_2 = k_2$$

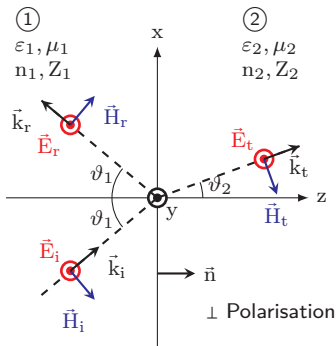
- Einsetzen in die obige Gleichung ergibt

1. Reflexionsgesetz: $\vartheta_i = \vartheta_r = \vartheta_1$

2. Brechungsgesetz nach Snellius: $n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$ mit $\vartheta_2 = \vartheta_t$

- Frage nun: Wie stark ist Reflexion bzw. Transmission?

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

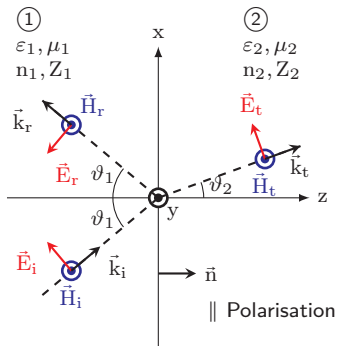


$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_F$$

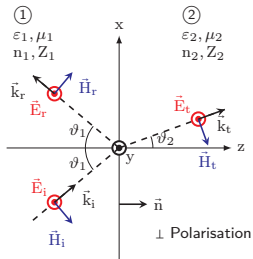
$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_A$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$



Tangentialkomponente von \vec{E} stetig
 Normalkomponente von \vec{D} unstetig
 Tangentialkomponente von \vec{H} unstetig
 Normalkomponente von \vec{B} stetig

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (\perp)



- Betrachtung \vec{E} (in y-Richtung)
- k-Richtungen

$$\vec{e}_{k_i} = \sin \vartheta_1 \vec{e}_x + \cos \vartheta_1 \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_{k_r} = \sin \vartheta_1 \vec{e}_x - \cos \vartheta_1 \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_{k_t} = \sin \vartheta_2 \vec{e}_x + \cos \vartheta_2 \vec{e}_z$$

- Ortsvektor bei $z = 0$: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$

- Stetigkeit der Tangentialkomponente von \vec{E}

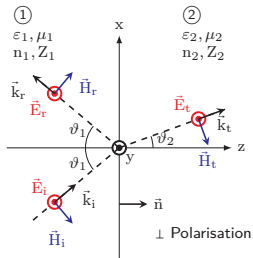
$$\vec{e}_z \times (\underline{E}_{0i} \vec{e}_y e^{-jk_i x \sin \vartheta_1} + \underline{E}_{0r} \vec{e}_y e^{-jk_r x \sin \vartheta_1}) = \vec{e}_z \times \underline{E}_{0t} \vec{e}_y e^{-jk_t x \sin \vartheta_2} ; \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$$

$$-\vec{e}_x (\underline{E}_{0i} e^{-jk_i x \sin \vartheta_1} + \underline{E}_{0r} e^{-jk_r x \sin \vartheta_1}) = -\vec{e}_x \underline{E}_{0t} e^{-jk_t x \sin \vartheta_2}$$

- Für $x = 0$ folgt:

$$\underline{E}_{0i} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t}$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (\perp)



- Betrachtung \vec{H}
- Oberflächenstromdichte $\vec{J}_A = \vec{0}$ (vgl. Felddiffusion im Halbraum)

$$\vec{e}_z \times (\vec{H}_i + \vec{H}_r) = \vec{e}_z \times \vec{H}_t \quad \vec{H} = \frac{1}{Z} \vec{e}_k \times \vec{E}$$

$$\vec{e}_z \times \left(\frac{1}{Z_1} \vec{e}_{k_i} \times \vec{E}_i + \frac{1}{Z_1} \vec{e}_{k_r} \times \vec{E}_r \right) = \vec{e}_z \times \frac{1}{Z_2} \vec{e}_{k_t} \times \vec{E}_t$$

- Auflösen des doppelten Kreuzproduktes (nutze: $\vec{e}_z \cdot \vec{E}_{irt} = 0$)

$$\frac{1}{Z_1} [-\vec{E}_i (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{k_i}) - \vec{E}_r (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{k_r})] = \frac{1}{Z_2} [-\vec{E}_t (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{k_t})]$$

$$\frac{1}{Z_1} [-\cos \vartheta_1 \vec{E}_i + \cos \vartheta_1 \vec{E}_r] = -\frac{1}{Z_2} \cos \vartheta_2 \vec{E}_t$$

$$\frac{1}{Z_1} [\cos \vartheta_1 \underline{E}_{0i} - \cos \vartheta_1 \underline{E}_{0r}] = \frac{1}{Z_2} \cos \vartheta_2 \underline{E}_{0t}$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (\perp)

- Zwei Beziehungen gefunden:

$$\underline{E}_{0i} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t} \quad \text{und} \quad \frac{1}{Z_1} [\cos \vartheta_1 \underline{E}_{0i} - \cos \vartheta_1 \underline{E}_{0r}] = \frac{1}{Z_2} \cos \vartheta_2 \underline{E}_{0t}$$

- Damit können der **Reflexions-** und der **Transmissionskoeffizient**

$$\underline{r}_{\perp} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} \quad \underline{t}_{\perp} = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}} \quad \text{bestimmt werden.}$$

- Aus der ersten Gleichung ergibt sich

$$\underline{E}_{0i} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t} \Rightarrow 1 + \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}} \Rightarrow \boxed{1 + \underline{r}_{\perp} = \underline{t}_{\perp}}$$

- Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$\frac{1}{Z_1} [\cos \vartheta_1 \underline{E}_{0i} - \cos \vartheta_1 \underline{E}_{0r}] = \frac{1}{Z_2} \cos \vartheta_2 \underline{E}_{0t} \Rightarrow \boxed{Z_2 \cos \vartheta_1 (1 - \underline{r}_{\perp}) = Z_1 \cos \vartheta_2 \underline{t}_{\perp}}$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (\perp)

- Wir hatten

$$1 + \underline{r}_{\perp} = \underline{t}_{\perp} \quad \text{und} \quad Z_2 \cos \vartheta_1 (1 - \underline{r}_{\perp}) = Z_1 \cos \vartheta_2 \underline{t}_{\perp}$$

- Hieraus ergeben sich Reflexions- und Transmissionskoeffizient (**Fresnelsche Beziehungen**) zu

$$\underline{r}_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \vartheta_1 - Z_1 \cos \vartheta_2}{Z_1 \cos \vartheta_2 + Z_2 \cos \vartheta_1}$$

$$1 + \underline{r}_{\perp} = \underline{t}_{\perp} = \frac{2Z_2 \cos \vartheta_1}{Z_1 \cos \vartheta_2 + Z_2 \cos \vartheta_1}$$

- Wichtiger Spezialfall: Übergang Luft-Metall

Luft: $Z = Z_1 \approx 377 \Omega$

$$\text{Metall: } Z = Z_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\underline{\epsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0 (\epsilon_r - j \frac{\kappa}{\epsilon_0 \omega})}} \approx (1 + j) \sqrt{\frac{\mu \omega}{2\kappa}} \rightarrow |Z_2| \ll 377 \Omega$$

$$\Rightarrow \underline{r}_{\perp} \approx -1 \quad \underline{t}_{\perp} \approx 0$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (||)

- Die Herleitung von Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für **parallele Polarisation** verläuft völlig analog und wird hier nicht wiederholt.
- Die Unterschiede in den **Fresnelschen Beziehungen** werden im direkten Vergleich deutlich:

$$\underline{r}_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \vartheta_1 - Z_1 \cos \vartheta_2}{Z_1 \cos \vartheta_2 + Z_2 \cos \vartheta_1}$$

$$1 + \underline{r}_{\perp} = \underline{t}_{\perp} = \frac{2Z_2 \cos \vartheta_1}{Z_1 \cos \vartheta_2 + Z_2 \cos \vartheta_1}$$

$$\underline{r}_{\parallel} = \frac{Z_1 \cos \vartheta_1 - Z_2 \cos \vartheta_2}{Z_2 \cos \vartheta_2 + Z_1 \cos \vartheta_1}$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} (1 + \underline{r}_{\parallel}) = \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} (1 - \underline{r}_{\parallel}) = \underline{t}_{\parallel} = \frac{2Z_2 \cos \vartheta_1}{Z_2 \cos \vartheta_2 + Z_1 \cos \vartheta_1}$$

- Für den Übergang Luft-Metall folgt hier (Unterschied folgt sofort aus der Stetigkeitsbedingung für die Tangentialkomponente des E-Feldes → Selbstübung):

$$\Rightarrow \underline{r}_{\parallel} \simeq +1 \quad \underline{t}_{\parallel} \simeq 0$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (mit n)

- Mit $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ und $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ folgt $Z = \mu c/n$, so dass für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten folgt

$$\underline{r}_{\perp} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \vartheta_2}$$

$$\underline{t}_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \vartheta_2}$$

$$\underline{r}_{\parallel} = \frac{-n_1 \cos \vartheta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \vartheta_1}$$

$$\underline{t}_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \vartheta_1}$$

- Wichtiger Spezialfall: $\mu_1 = \mu_2$, z.B. beide unmagnetisch

$$\underline{r}_{\perp} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2}$$

$$\underline{t}_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2}$$

$$\underline{r}_{\parallel} = \frac{-n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}$$

$$\underline{t}_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (ϑ_1, ϑ_2)

- Im Falle $\mu_1 = \mu_2$ können die Fresnelschen-Beziehungen mit Hilfe des Brechungsgesetzes $n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$ auch nur mit den Winkeln geschrieben werden:

$$\underline{r}_{\perp} = \frac{\cos \vartheta_1 - \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1 + \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \cos \vartheta_2} = \frac{\sin (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin (\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

$$\underline{t}_{\perp} = \frac{2 \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \cos \vartheta_2} = \frac{2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1}{\sin (\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

$$\underline{r}_{\parallel} = \frac{-\cos \vartheta_2 + \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2 + \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \cos \vartheta_1} = \frac{\tan (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\tan (\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

$$\underline{t}_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2 + \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \cos \vartheta_1} = \frac{2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1}{\sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) \cos (\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$

Verschwinden der Reflexion – Brewster-Winkel

- Aus den Reflexionskoeffizienten können die Bedingungen für das **Verschwinden der Reflexion** abgelesen werden:

$$\underline{r}_{\perp} = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \qquad \underline{r}_{\parallel} = \frac{\tan(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\tan(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

- Fall 1: $\vartheta_1 = \vartheta_2 \rightarrow n_1 = n_2 \rightarrow$ **optische gleiches Material**
- Fall 2: Nur für **parallele Polarisation** ergibt sich eine weitere Möglichkeit

$$\underline{r}_{\parallel} = \frac{\tan(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\tan(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \rightarrow 0 \text{ für } \boxed{\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \vec{k}_r \perp \vec{k}_t$$

- Nach dem Brechungsgesetz von Snellius gilt in diesem Fall:

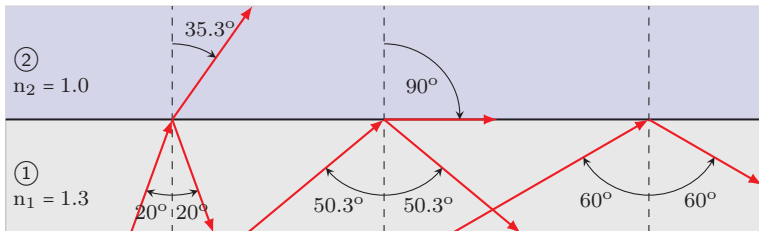
$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin(\pi/2 - \vartheta_1)} = \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \vartheta_1} = \boxed{\tan \vartheta_1 = \frac{n_2}{n_1}} \text{ Brewsterscher Polarisationswinkel}$$

- Beliebig pol. Welle \rightarrow Reflexion ist \perp polarisiert! \rightarrow **Polarisator**

Totalreflexion

- Brechungsgesetz: $n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$
- Übergang zum **optisch dichteren Medium**: $n_1 < n_2 \Rightarrow \vartheta_1 > \vartheta_2$
- Übergang zum **optisch dünnerem Medium**: $n_1 > n_2 \Rightarrow \vartheta_1 < \vartheta_2$
 - In diesem Fall wird bei Vergrößerung von ϑ_1 irgendwann $\vartheta_2 = \pi/2$ erreicht.
 - Es wird dann nichts mehr transmittiert → **Totalreflexion**
 - Der **Grenzwinkel der Totalreflexion** ϑ_{1G} ist bestimmt durch

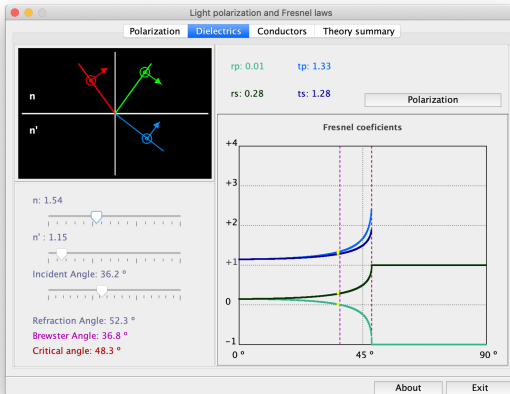
$$\sin \vartheta_{1G} = \frac{n_2}{n_1}$$



- Anwendung: Lichtwellenleiter (Glasfaser), Reflexionsprisma

Programme zur Berechnung

- SimPy → Physics → Optics Module (<https://www.sympy.org>)
- Java Applet der Universität Barcelona:
http://www.ub.edu/javaoptics/docs_applets/Doc_PolarEn.html



Totalreflexion – Feld im Medium 2

- Frage: Ist Medium 2 bei Totalreflexion ($\vartheta_1 > \vartheta_{1G}$) feldfrei?
- Grenzwinkel der Totalreflexion beim Übergang in ein optisch dünneres Medium:

$$\sin \vartheta_{1G} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta_{1G} = 1 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta_1 > 1 \text{ für } \vartheta_1 > \vartheta_{1G}$$

- Wir betrachten \vec{k}_t :

$$\begin{aligned}\vec{k}_t &= k_2 \vec{e}_{k_t} = k_2 (\sin \vartheta_2 \vec{e}_x + \cos \vartheta_2 \vec{e}_z) \\ &= k_2 \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta_1 \vec{e}_x \pm \sqrt{(1 - \sin^2 \vartheta_2)} \vec{e}_z \right) \\ &= k_2 \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta_1 \vec{e}_x \pm \sqrt{\left(1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \vartheta_1\right)} \vec{e}_z \right) \\ &= k_2 \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta_1 \vec{e}_x \pm j \sqrt{\left(\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \vartheta_1 - 1\right)} \vec{e}_z \right) \\ &= \beta \vec{e}_x \pm j \alpha \vec{e}_z\end{aligned}$$

Totalreflexion – Feld im Medium 2 (...)

- Für das elektrische Feld im Medium 2 ergibt sich mit diesem Wellenvektor und dem Transmissionskoeffizienten t

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= t \underline{E}_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \vec{e}_{E_t} \\ &= t \underline{E}_{0i} e^{\pm \alpha z} e^{j(\omega t - \beta x)} \vec{e}_{E_t} \quad +\alpha z \text{ Lösung unphysikalisch} \\ &= t \underline{E}_{0i} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta x)} \vec{e}_{E_t} \quad \text{exponentieller Abfall in } z; \text{ Welle in } x\end{aligned}$$

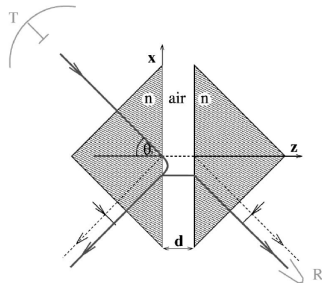
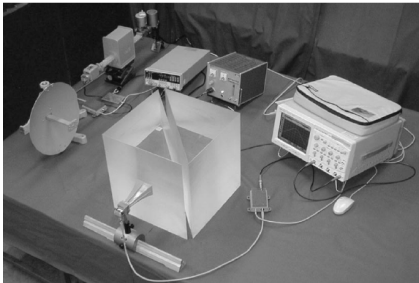
- Poyntingscher Vektor:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{2} \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* = \frac{1}{2Z_2} \vec{E}_t \times (\vec{e}_{k_t}^* \times \vec{E}_t^*) = \frac{1}{2Z_2} |\vec{E}_t|^2 \vec{e}_{k_t}^*, \quad \vec{k}_t = \beta \vec{e}_x - j\alpha \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{2Z_2 k_2} |t \underline{E}_{0i}|^2 e^{-2\alpha z} (\beta \vec{e}_x + j\alpha \vec{e}_z)\end{aligned}$$

- Wirkleistungsfluss in x-Richtung und Blindleistungsfluss in z-Richtung

Frustrierte Totalreflexion

- Wird im Bereich des exponentiell abfallenden Feldes wieder ein Ausbreitungsmedium gebracht, so ergibt sich wieder eine transmittierte Welle. Man spricht von **frustrierter Totalreflexion**
- Es gibt formal eine große Übereinstimmung mit dem quantenmechanischen Tunneleffekt
- Interessantes Experiment zum **superluminalen Tunneln** (interessante und lehrreiche Diskussion in der Literatur). Z.B: Haibel, A., Nimtz, G. Stahlhofen, A., „Frustrated total reflection: The double prisms revisited.“, Phys. Rev. E 63, 047601 (2001)



Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Elektromagnetische Wellen XI - Erzeugung

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Ausgangspunkt

- Im Abschnitt **Elektromagnetische Wellen I - Grundlagen** hatten wir bereits die Entkopplung der Maxwell-Gleichungen in ihrer allgemeinen Form betrachtet.
- Für **Skalarpotential** ϕ und **Vektorpotential** \vec{A} mit

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ergeben sich:

- In **Coulomb-Eichung** (Strahlungseichung) ($\text{div } \vec{A} = 0$)

$$\Delta \phi = -\frac{\rho_V}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad } \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mu \vec{J}$$

- In **Lorenz-Eichung** ($\text{div } \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$)

$$\Delta \phi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$$

Lösung für die Potentiale in Lorenzeichung

- Basierend auf den Ableitungen in **Elektromagnetische Wellen VII - Allgemeine Lösung** (Kirchhoffsche-Lösung, Huygens-Fresnelsches-Prinzip) kann die **Greensche-Funktion** (δ -Anregung am Ort \vec{r}' zur Zeit t') direkt angegeben werden (auf die formale Herleitung wird hier verzichtet):

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = G_{\text{ret}}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v_c} - (t - t')\right) = \frac{\delta(t' - t_{\text{ret}})}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Hierbei ist $t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v_c}$ die **retardierte Zeit** und G_{ret} die **retardierte Greensche Funktion**.
- Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung in Lorenz-Eichung sind dann die **retardierten Potentiale**

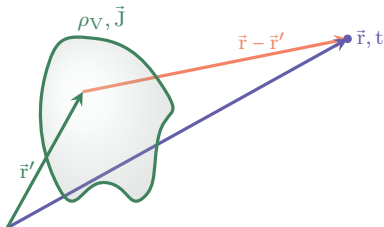
$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho_V(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v_c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v_c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Bemerkungen zur retardierten Lösung

- Retardierte Potentiale: Lösung wegen Retardierung in der Regel schwierig

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho_V(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v_c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v_c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$$



- Die Zeit $\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v_c}$ ist gerade die **Laufzeit** vom Quellpunkt zum Beobachtungspunkt
- Es gibt formal auch **avancierte** Lösungen \rightarrow nicht kausal
- Unterschied zur quasistationären Betrachtung: dort wurde Retardierung vernachlässigt.

Räumlich beschränktes Quellgebiet und harm. ZA

- Die Quellen ρ_V, \vec{J} seien von Null verschieden nur innerhalb einer **Kugel mit Durchmesser d** → Es genügt die Betrachtung des Vektorpotentials ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}; \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H}$).
- Wir betrachten **harmonische Zeitabhängigkeit**

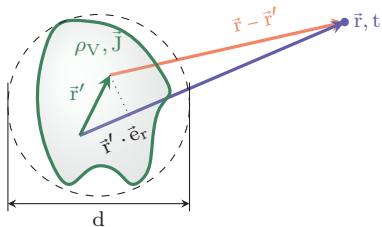
$$\vec{J}(\vec{r}', t) = \Re \{ \vec{J}(\vec{r}') e^{j\omega t} \}$$
$$\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v_c}) = \Re \left\{ \vec{J}(\vec{r}') e^{j\omega t} e^{-j\omega \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v_c}} \right\} = \Re \left\{ \vec{J}(\vec{r}') e^{j\omega t} e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\}$$

- Damit gilt für das komplexe Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{J}(\vec{r}') d^3r'$$

- Hierbei ist $\tilde{G}_{\text{ret}}(\vec{r} - \vec{r}', k) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ die retardierte Greensche-Funktion im Bildraum mit $k = \frac{\omega}{v_c} = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$.

Strahlungszonen



- Näherung für $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ (mit $\frac{1}{1-x} \Big|_{x \ll 1} \simeq 1 + x$):

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq |\vec{r}| - \vec{r}' \cdot \vec{e}_r = r \left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{r}'}{r} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{r}'}{r} \right)$$

- **Nahzone:** $d \ll r \ll \lambda$ (statische Zone)

$$e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}r\left(1-\frac{\vec{e}_r \cdot \vec{r}'}{r}\right)} \simeq e^{-j0} = 1 \quad \rightarrow \text{keine Retardierung}$$

- **Fernzone:** $d \ll r$ und $\lambda \ll r$ (Strahlungszone)

$$e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq e^{-jkr} \quad \rightarrow \text{gleiche Retardierung für alle } \vec{r}' \rightarrow \text{vor das Integral}$$

- **Übergangszone:** $d \simeq r$ und/oder $r \simeq \lambda$

Dieser Fall ist schwieriger und muss jeweils konkret analysiert werden.

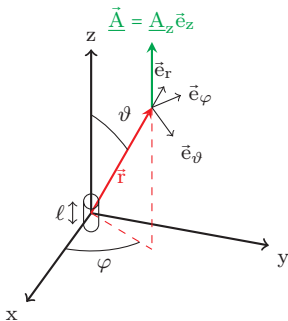
Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

TET: Antennen I - Hertzscher Dipol und Linearantennen

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Ausgangspunkt



- Der **Hertzsche Dipol** ist eine wichtige Idealisierung einer lokalen Quelle von elektromagnetischen Wellen.
- Hertzsche Dipole werden auch in der Modellierung von Antennen und als Bezugsgröße für Antennencharakteristiken genutzt.
- Realisiert wird der Hertzsche Dipol durch einen sehr kurzen geraden Leiter, auf dem ein Wechselstrom (in der Regel harmonisch) eingepreßt ist.

- Für harmonische Zeitabhängigkeit gilt für das Vektorpotential in Lorenzgleichung

$$\underline{\underline{\vec{A}}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underline{\underline{\vec{J}}}(\vec{r}') d^3r'$$

- Mit einem **dünnen Leiter** in z-Richtung gilt $\underline{\underline{\vec{J}}}(\vec{r}') d^3r' = \underline{\underline{I}}(z') \vec{e}_z dz'$ und es folgt

$$\underline{\underline{\vec{A}}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underline{\underline{I}}(z') \vec{e}_z dz'$$

Hertzscher Dipol - Vektorpotential

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underline{I}(\vec{r}') \vec{e}_z dz'$$

- Von einem **Hertzschem Dipol** spricht man, wenn
 1. Die Länge ℓ des Leiters **wesentlich kleiner als die Wellenlänge** λ ist: $\ell \ll \lambda$
 2. Der Leiter ist **linienförmig**.
 3. Die Stromverteilung auf dem Leiter ist **konstant**: $\underline{I}(\vec{r}') = \underline{I}$
- Für einen **Dipol im Ursprung**: $\vec{r}' \simeq \vec{0} \rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'| \simeq |\vec{r}| = r$

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \underline{I} \vec{e}_z \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz' = \frac{\mu}{4\pi} \underline{I} \ell \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{e}_z = \underline{A}_z \vec{e}_z$$

- Vektorpotential in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ):

$$\underline{A}_r = \underline{A}_z \cos \vartheta$$

$$\underline{A}_\vartheta = -\underline{A}_z \sin \vartheta$$

$$\underline{A}_\varphi = 0$$

$$\underline{A}_r = \frac{\mu}{4\pi} \underline{I} \ell \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \vartheta$$

$$\underline{A}_\vartheta = -\frac{\mu}{4\pi} \underline{I} \ell \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \vartheta$$

Magnetfeld

- Aus dem Vektorpotential

$$\underline{A}_r = \frac{\mu}{4\pi} \underline{I} \ell \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \vartheta \quad \underline{A}_\vartheta = -\frac{\mu}{4\pi} \underline{I} \ell \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \vartheta \quad \underline{A}_\varphi = 0$$

- berechnet sich unmittelbar das Magnetfeld:

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \underline{H}_\varphi \underline{e}_\varphi = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{A} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \underline{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right] \underline{e}_\varphi \quad \text{nur } \varphi\text{-Komponente} \\ &= \frac{1}{4\pi} \underline{I} \ell \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \vartheta \left[\frac{1}{r} + jk \right] \underline{e}_\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \underline{I} \ell \frac{e^{-jkr}}{r^2} \sin \vartheta [1 + jkr] \underline{e}_\varphi \quad k = \omega/v_p \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} \underline{I} \ell \frac{e^{-jkr}}{(kr)^2} \sin \vartheta [1 + jkr] \underline{e}_\varphi = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} \underline{I} \ell e^{-jkr} \sin \vartheta \left[\frac{1}{(kr)^2} + \frac{j}{kr} \right] \underline{e}_\varphi \end{aligned}$$

- $kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}$: Wellenlänge als „natürliche“ Längeneinheit

Elektrisches Feld

- Das Elektrische Feld könnte prinzipiell auch direkt aus dem Vektorpotential berechnet werden:

$$\text{LE: } \text{div } \underline{\underline{\vec{A}}} + j\omega\varepsilon\mu\underline{\underline{\phi}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\phi}} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \text{div } \underline{\underline{\vec{A}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{E}}} = -\text{grad } \underline{\underline{\phi}} - j\omega\underline{\underline{\vec{A}}} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \text{grad div } \underline{\underline{\vec{A}}} - j\omega\underline{\underline{\vec{A}}}$$

- Einfacher direkt über Maxwell-Gleichung

$$\text{rot } \underline{\underline{\vec{H}}} = \underline{\underline{\vec{J}}} + j\omega\varepsilon\underline{\underline{\vec{E}}} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \text{rot } \underline{\underline{\vec{H}}} \quad \underline{\underline{\vec{J}}} = \vec{0} \text{ im Lösungsgebiet}$$

- Es ergibt sich

$$\underline{\underline{\vec{E}}} = \left\{ \frac{1}{2\pi} Z \frac{\omega^2}{v_p^2} \underline{\underline{I}} \ell e^{-jkr} \cos \vartheta \left[\frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] \right\} \vec{e}_r + \left\{ \frac{1}{4\pi} Z \frac{\omega^2}{v_p^2} \underline{\underline{I}} \ell e^{-jkr} \sin \vartheta \left[\frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] \right\} \vec{e}_\vartheta$$

Fernfeld

- Die allgemeine Feldlösung lautet:

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{H}} &= \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} \underline{I} l e^{-jkr} \sin \vartheta \left[\frac{1}{(kr)^2} + \frac{j}{kr} \right] \right\} \underline{\tilde{e}}_\varphi \\ \underline{\tilde{E}} &= \left\{ \frac{1}{2\pi} Z \frac{\omega^2}{v_p^2} \underline{I} l e^{-jkr} \cos \vartheta \left[\frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] \right\} \underline{\tilde{e}}_r + \\ &\quad \left\{ \frac{1}{4\pi} Z \frac{\omega^2}{v_p^2} \underline{I} l e^{-jkr} \sin \vartheta \left[\frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] \right\} \underline{\tilde{e}}_\vartheta\end{aligned}$$

- Für $kr \gg 1 \rightarrow$ nur führenden Term nehmen \rightarrow **Fernfeld**

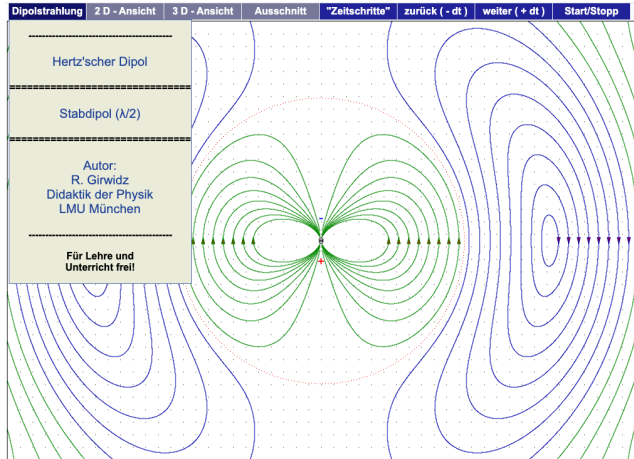
$$\underline{\tilde{H}} = \underline{H}_\varphi \underline{\tilde{e}}_\varphi = \frac{j}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} \underline{I} l \frac{e^{-jkr}}{kr} \sin \vartheta \underline{\tilde{e}}_\varphi$$

$$\underline{\tilde{E}} = \underline{E}_\vartheta \underline{\tilde{e}}_\vartheta = Z \frac{j}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} \underline{I} l \frac{e^{-jkr}}{kr} \sin \vartheta \underline{\tilde{e}}_\vartheta = Z \underline{H}_\varphi \underline{\tilde{e}}_\vartheta$$

- Hierbei ist $Z = \frac{|\underline{\tilde{E}}|}{|\underline{\tilde{H}}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{k}{\omega \epsilon}$ der **Feldwellenwiderstand**

Visualisierung

- R. Girwidz, Didaktik der Physik, LMU München https://www.didaktikonline.physik.uni-muenchen.de/programme/dipolstr/dipolstr_leifi.html

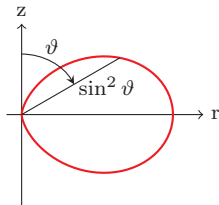
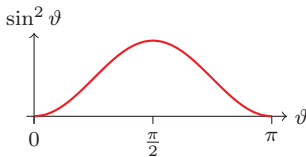


Mittlere Energieflussdichte

- Im Fernfeld berechnet sich die **mittlere Energieflussdichte** zu

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \left(Z \frac{j}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} \underline{I} \ell \frac{e^{-jkr}}{kr} \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta \right) \times \left(\frac{j}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} \underline{I} \ell \frac{e^{-jkr}}{kr} \sin \vartheta \vec{e}_\varphi \right)^* \\ &= \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} \frac{|\underline{I}| \ell}{kr} \right)^2 (\sin \vartheta)^2 \vec{e}_r \in \mathbb{R} \\ &= S_r(r, \vartheta) \vec{e}_r = \langle \vec{S} \rangle\end{aligned}$$

- Verlauf – „Donut“

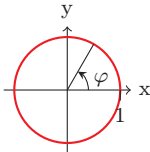


Strahlungsdiagramm

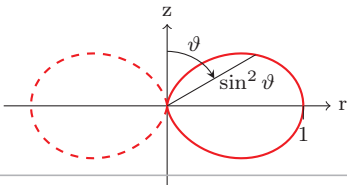
- Das **Strahlungsdiagramm** ist die normierte Darstellung der mittleren Energieflussdichte (analog z.B. auch für Feldstärken definierbar), also von

$$\frac{S_r(r, \vartheta, \varphi)}{\max(S_r(r, \vartheta, \varphi))}$$

- Dargestellt werden in der Regel die zweidimensionalen Hauptschnitte.
- Für den Hertzischen Dipol ergeben sich das „**Horizontaldiagramm**“ (für $\vartheta = \pi/2$)



- und das „**Vertikaldiagramm**“ (für $\varphi = 0$); „**Rückwärtskeule**“ wird mitgezeichnet



Mittlere abgestrahlte Leistung

- Die mittlere abgestrahlte Leistung $\langle P_a \rangle$ ergibt sich direkt aus der mittleren Energieflussdichte integriert über die Oberfläche einer Kugel mit Radius r ($O(K_r)$):

$$\begin{aligned}\langle P_a \rangle &= \oiint_{O(K_r)} \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{A} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} \frac{|I|\ell}{kr} \right)^2 (\sin \vartheta)^2 \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \\ &= \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} \frac{|I|\ell}{k} \right)^2 2\pi \frac{4}{3} = \frac{1}{12\pi} Z \left(\frac{\omega}{v_p} |I|\ell \right)^2 = \frac{\pi}{3} Z \left(\frac{|I|\ell}{\lambda} \right)^2\end{aligned}$$

- Ein (hypothetischer) **isotroper Strahler** würde pro Raumwinkel somit die Leistung $P_{\text{iso}} = \langle P_a \rangle / 4\pi r^2$ abstrahlen.
- Für den Hertzschen Dipol ergibt sich so die **Direktivität** (Richtwirkung)

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S_r(r, \vartheta, \varphi)}{P_{\text{iso}}} = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta ; D_{\text{max}} = D(\vartheta = \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2} \hat{=} 1.76 \text{ dBi} \hat{=} 0 \text{ dBd}$$

Bemerkungen

- Der **isotrope Strahler** ist nur eine hypothetische Idealisierung
- Mathematische Topologie: „Ilgelsatz“ bzw. Satz von Poincaré-Brouwer: Auf einer Sphäre \mathbb{S}^n gibt es genau dann ein tangenciales, stetiges, nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.
- Auf der Kugel ($n = 2$): „**Jeder stetig gekämmte Igel hat mindestens einen Glatzpunkt.**“
- Der ideale Hertzsche Dipol kann durch extrem kurze Antennen ($\ell < \frac{\lambda}{10}$) tatsächlich **näherungsweise** realisiert werden.
- Sowohl der Hertzsche Dipol als auch der isotrope Strahler werden als Bezugsgrößen in der Antennentechnik genutzt (**Elementarquellen**).
- Das zum Hertzschen Dipol **duale** System ist der **Fitzgeraldsche Dipol**: infinitesimale Leiterschleife; Flächennormale in z -Richtung \rightarrow nur $\underline{\vec{E}}_\varphi$ und $\underline{\vec{H}}_\vartheta$ im Fernfeld.
- Feldwellenwiderstand $Z = \frac{|\underline{\vec{E}}|}{|\underline{\vec{H}}|}$ nur im Fernfeld konstant mit $Z = 120\pi \Omega$.
Im Nahfeld des Hertzschen Dipols: **Hochimpedanzfeld**
Im Nahfeld des Fitzgeraldschen Dipols: **Niederimpedanzfeld**
- **Grenze zum Fernfeld** bei kurzen Antennen: $kr \gg 1 \rightarrow r \gg \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{v_p}{2\pi f}$:

f	50 Hz	1 kHz	100 MHz	1 GHz
$\frac{c}{2\pi f}$	954.3 km	47.8 km	0.48 m	4.8 cm

Linearantenne

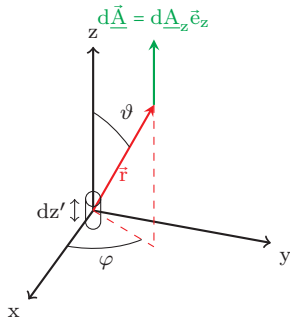
- Bei den Elementardipolen: infinitesimales Element \rightarrow zeitlich harmonischer aber **räumlicher konstanter Strom**.
- **Lineare Antenne**: dünner perfekt leitender Draht, der von einem **ortsabhängigen** (harmonischen) Wechselstrom $\underline{I}(\vec{r}')$ durchflossen wird.
- Betrachte zunächst: Stromelement im Ursprung \rightarrow Hertzscher Dipol

- Beitrag zum Vektorpotential am Punkt P:

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \underline{I} dz' \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{e}_z$$

- Für das Magnetfeld

$$\begin{aligned} d\vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{\mu} \text{rot } d\vec{A}(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \underline{I} dz' \text{rot} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \vec{e}_z \right) \end{aligned}$$



Magnetfeld

- Wir formen weiter um:

$$\begin{aligned}d\vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \underline{I} dz' \operatorname{rot}_{\vec{r}} \left(\frac{e^{-jk r}}{r} \vec{e}_z \right) \\&= \frac{1}{4\pi} \underline{I} dz' \left[\frac{e^{-jk r}}{r} \underbrace{\operatorname{rot} \vec{e}_z}_{=\vec{0}} - \vec{e}_z \times \operatorname{grad} \left(\frac{e^{-jk r}}{r} \right) \right] \\&= \frac{1}{4\pi} \underline{I} dz' \left[-\vec{e}_z \times \left(-\frac{\vec{r}}{r} \left(\frac{1}{r} + jk \right) \right) \frac{e^{-jk r}}{r} \right] \\&= \frac{1}{4\pi} \underline{I} dz' \left(\vec{e}_z \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \left(\frac{1}{r} + jk \right) \frac{e^{-jk r}}{r}\end{aligned}$$

- Stromelement beliebiger Länge: $\underline{I} \rightarrow \underline{I}(\vec{r}')$, $dz' \vec{e}_z \rightarrow d\vec{r}'$, $\vec{r} \rightarrow \vec{r} - \vec{r}'$:

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \underline{I}(\vec{r}') \left(d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + jk \right) \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Fernfeld

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \underline{I}(\vec{r}') \left(d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + jk \right) \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Fernfeld: Folgende Näherungen sind möglich (vgl. auch **Elektromagnetische Wellen XI - Erzeugung** - Strahlungszonen)

$$k|\vec{r} - \vec{r}'| \gg 1 \Rightarrow k \gg \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}}$$

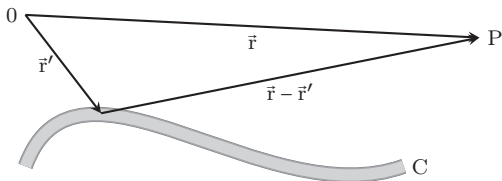
- damit gilt im **Fernfeld**:

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{jk}{4\pi} \underline{I}(\vec{r}') \left(d\vec{r}' \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}}$$

Fernfeld (...)

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j\mathbf{k}}{4\pi} \underline{I}(\vec{r}') \left(d\vec{r}' \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{e^{-jk r}}{r} e^{jk \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}}$$

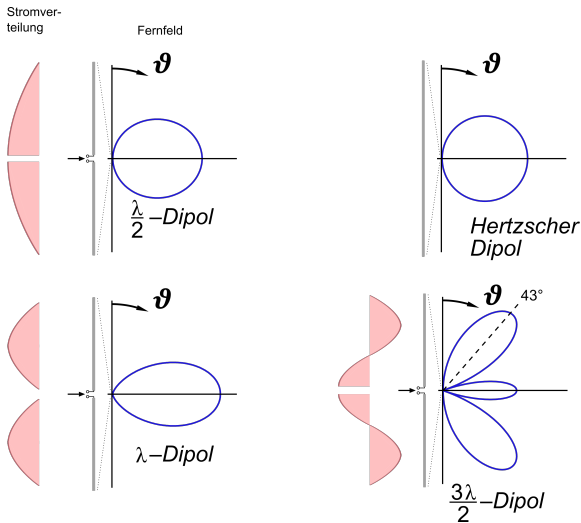
- Dünner Draht mit Kontur C:



- Damit ist das Magnetfeld im Fernfeld prinzipiell berechenbar aus:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j\mathbf{k}}{4\pi} \frac{e^{-jk r}}{r} \int_C \underline{I}(\vec{r}') e^{jk \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}} \left(d\vec{r}' \times \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

Abstrahldiagramme typischer Dipol-Antennen



Typische Bauformen von Linearantennen



Halbwellendipol



Logarithmisch-
Periodische-Antenne
(Log-Per)



Bikonische
Antenne



Bikoni-Log
Antenne



Loop-Antenne
(geschirmt)

Bilder: <http://www.schwarzbeck.de/>

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

TET: Wellenleiter I - Zylindrische Wellenleiter

Theoretische Elektrotechnik

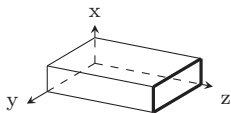
Lizenz: CC BY 3.0 DE



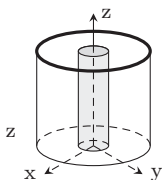
Ausgangspunkt

- Viele Formen von **Wellenleitern** in technischer Nutzung
- Beispiele:

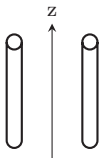
Hohlleiter



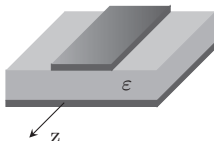
Koaxialkabel



Zweidrahtleitung
(Lecher-Leitung)

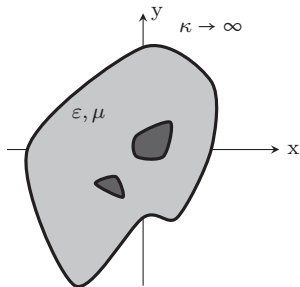


Mikrostreifenleitung



- Die Strukturen sind in z -Richtung **translationsinvariant** → Alle Schnitte senkrecht zu z sind identisch!
- In diesem Fall sprechen wir von **zylindrischen Wellenleitern**.
- Wir betrachten hier nur Wellenleiter mit metallischen Begrenzungen (als ideal leitend angenommen)
- Dielektrische Wellenleiter (→ Totalreflexion) werden hier nicht betrachtet.
- Zwei Betrachtungsweisen: Feldtheoretisch (geht immer) und (klassische) **Leitungstheorie** (mit Strom und Spannung; geht teilweise → später).

Zylindrische Wellenleiter



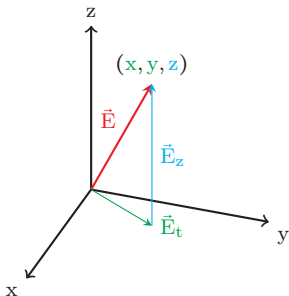
- Die Vektoren \vec{e}_x und \vec{e}_y spannen die **Querschnittsebene** oder **Transversalebene** auf.
- Voraussetzung: Alle Querschnittsebenen (für verschiedene z) sind identisch.
- Lösungsgebiet: lineares, homogenes, isotropes Dielektrikum mit ε, μ
- Alles andere: perfekte Leiter ($\kappa \rightarrow \infty$)
- Wir betrachten den Fall der **harmonischen Zeitabhängigkeit**.

- Homogene Wellengleichung ($\frac{\partial}{\partial t}$) → **Helmholtz-Gleichung** ($j\omega$)

$$\square \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad (\Delta + \varepsilon\mu\omega^2) \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$\square \underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad (\Delta + \varepsilon\mu\omega^2) \underline{\vec{B}}(\vec{r}) = \vec{0}$$

Zylinder-Geometrie – Vektorzerlegung



- Jeder Vektor kann immer in eine **transversale** und eine **longitudinalen** Komponente zerlegt werden:

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z = \vec{E}_t + E_z \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_t = (\vec{e}_z \times \vec{E}) \times \vec{e}_z$$

- Analog für magnetische Flussdichte.

- Kopplung über Maxwell-Gleichung: $\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B}$
- Rotation in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z \\ &= \nabla \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right] \times \vec{F} \end{aligned}$$

Transversale Rotation

- Die Rotation in kartesischen Koordinaten ist:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{F} &= \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z \\ &= \nabla \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right] \times \vec{F}\end{aligned}$$

- Wir definieren die **transversale Rotation** $\operatorname{rot}_t = \nabla_t \times = \left(\nabla - \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \times$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_t \vec{F} &= \nabla_t \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \right] \times \vec{F} \\ &= \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} \right] \vec{e}_x + \left[-\frac{\partial F_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z\end{aligned}$$

- Offenbar stimmen die **longitudinalen Anteile** (z-Komponente) überein, d.h. es gilt:

$$\vec{e}_z \cdot (\operatorname{rot}_t \vec{F}) = \vec{e}_z \cdot \operatorname{rot} \vec{F}$$

- Angewendet auf die z-Komponente des Induktionsgesetzes bedeutet das

$$\vec{e}_z \cdot (\operatorname{rot}_t \vec{E}) = \vec{e}_z \cdot (\operatorname{rot}_t \vec{E}_t + \operatorname{rot}_t \vec{E}_z) = \boxed{\vec{e}_z \cdot (\operatorname{rot}_t \vec{E}_t) = -j\omega \underline{B}_z}$$

Transversale Komponente des Induktionsgesetzes

- Für die transversalen Komponenten gilt

$$\begin{aligned}(\vec{e}_z \times \text{rot } \vec{\underline{E}}) \times \vec{e}_z &= (\vec{e}_z \times (-j\omega \vec{\underline{B}})) \times \vec{e}_z \\ \left[\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y &= -j\omega (\underline{B}_x \vec{e}_x + \underline{B}_y \vec{e}_y) = -j\omega \vec{\underline{B}}_t \quad | \vec{e}_z \times \\ \left[\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \right] \vec{e}_y - \left[\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right] \vec{e}_x &= -j\omega \vec{e}_z \times \vec{\underline{B}}_t \\ \left[\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \vec{e}_y \right] - \frac{\partial}{\partial z} (\underline{E}_x \vec{e}_x + \underline{E}_y \vec{e}_y) &= -j\omega \vec{e}_z \times \vec{\underline{B}}_t\end{aligned}$$

$$\text{grad}_t \underline{E}_z - \frac{\partial}{\partial z} \vec{\underline{E}}_t = -j\omega \vec{e}_z \times \vec{\underline{B}}_t$$

- Aus dem Durchflutungsgesetz $\text{rot } \vec{\underline{B}} = j\omega \varepsilon \mu \vec{\underline{E}}$ folgt analog:

$$\vec{e}_z \cdot (\text{rot}_t \vec{\underline{B}}_t) = j\omega \varepsilon \mu \underline{E}_z$$

$$\text{grad}_t \underline{B}_z - \frac{\partial}{\partial z} \vec{\underline{B}}_t = j\omega \varepsilon \mu \vec{e}_z \times \vec{\underline{E}}_t$$

Bestimmung der transversalen Komponenten

- Die beiden Gleichungen

$$\text{grad}_t \underline{E}_z - \frac{\partial}{\partial z} \underline{\vec{E}}_t = -j\omega \underline{e}_z \times \underline{\vec{B}}_t$$

$$\text{grad}_t \underline{B}_z - \frac{\partial}{\partial z} \underline{\vec{B}}_t = j\omega \varepsilon \mu \underline{e}_z \times \underline{\vec{E}}_t$$

können leicht entkoppelt werden ($\frac{\partial}{\partial z}$, einsetzen, $\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = \mp jk \underline{E}_z$, $\frac{\partial^2 \underline{E}_t}{\partial z^2} = -k^2 \underline{E}_t$).

- Die entkoppelten Gleichungen lauten:

$$\underline{\vec{E}}_t = \frac{j}{\omega^2 \varepsilon \mu - k^2} [\mp k \text{grad}_t \underline{E}_z + \omega \underline{e}_z \times \text{grad}_t \underline{B}_z]$$

$$\underline{\vec{B}}_t = \frac{j}{\omega^2 \varepsilon \mu - k^2} [\mp k \text{grad}_t \underline{B}_z - \omega \varepsilon \mu \underline{e}_z \times \text{grad}_t \underline{E}_z]$$

- Sind die **longitudinalen Feldkomponente bekannt**, so lassen sich die **transversalen Feldkomponente berechnen**.
- Im allgemeinen schwierig, aber einfache Spezialfälle.

Zerlegung des Laplace-Operators

- Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten (x, y, z) :

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}_{=\Delta_t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_t + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Zur Lösung der Helmholtzgleichung (z.B. für das elektrische Feld)

$$(\Delta + \epsilon\mu\omega^2) \vec{\underline{E}}(\vec{r}) = \vec{0}$$

setzen wir in **z-Richtung propagierende Wellen** an:

$$\vec{\underline{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\underline{E}}_0(x, y) e^{j(\omega t \pm kz)} \xrightarrow{\text{ruhender Zeiger}} \vec{\underline{E}}(\vec{r}) = \vec{\underline{E}}_0(x, y) e^{\pm jkz}$$

- Hierbei propagiert die „+“-Lösung in Richtung $-\vec{e}_z$ und die „-“-Lösung in Richtung $+\vec{e}_z$
- Mit der Zerlegung des Laplace-Operators und mit $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k^2$ schreibt sich die Helmholtzgleichung nun in dieser Form

$$\Delta_t \vec{\underline{E}}(\vec{r}) + \underbrace{(\epsilon\mu\omega^2 - k^2)}_{=\gamma^2} \vec{\underline{E}}(\vec{r}) = \vec{0}$$

Modentypen

- **Fallunterscheidung** auf der Basis der Gleichungen (mit $\gamma^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - k^2$)

$$\gamma^2 \vec{\underline{E}}_t = j [\mp k \text{grad}_t \underline{E}_z + \omega \vec{e}_z \times \text{grad}_t \underline{B}_z]$$

$$\gamma^2 \vec{\underline{B}}_t = j [\mp k \text{grad}_t \underline{B}_z - \omega \varepsilon \mu \vec{e}_z \times \text{grad}_t \underline{E}_z]$$

- **TEM-Mode:** $\underline{E}_z = 0$ und $\underline{B}_z = 0$
 - Triviale Lösung: $\vec{\underline{E}} = \vec{0}$ und $\vec{\underline{B}} = \vec{0} \rightarrow$ nicht weiter interessant
 - **Bedingung für TEM-Mode**

$$\gamma^2 = 0 \Rightarrow \boxed{k^2 = k_0^2 = \varepsilon \mu \omega^2}$$

- Wenn TEM-Moden, dann für beliebige Frequenzen! Kein TEM-Mode für verschiedene Materialien im Lösungsvolumen \rightarrow **Quasi-TEM-Mode** (Mikrostreifenleitung, isolierte Zweidrahtleitung)
- **TE- und TM-Mode:** Nur eine der longitudinalen Komponenten verschwindet
- **Hybride Moden:** Keine der longitudinalen Komponenten verschwinden (wird nicht weiter betrachtet).

TEM-Lösungen

- TEM-Lösung: $\underline{E}_z = 0$ und $\underline{B}_z = 0 \Rightarrow \boxed{k_0 = \omega \sqrt{\epsilon \mu}}$ (für jedes ω gibt es ein k)
- Für die transversale Rotation hatten wir schon

$$\operatorname{rot}_t \underline{\vec{E}} = \left[\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \right] \vec{e}_x + \left[-\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

- Im TEM-Fall sind **x und y-Komponente** von $\operatorname{rot}_t \underline{\vec{E}}$ also offensichtlich Null.
- Die **z-Komponenten** ergibt sich aus der z-Komponente des Induktionsgesetz

$$\vec{e}_z \cdot (\operatorname{rot}_t \underline{\vec{E}}_t) = -j\omega \underline{B}_z \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \operatorname{rot}_t \underline{\vec{E}}_t = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot}_t \underline{\vec{E}} = \vec{0}}$$

- Ohne Ladungsquellen im Lösungsgebiet gilt auch

$$\operatorname{div} \underline{\vec{E}} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}_t \underline{\vec{E}}_t = -\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{div}_t \underline{\vec{E}} = 0}$$

- Hieraus folgt mit $\underline{\vec{E}} = -\operatorname{grad} \phi$, dass $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_t$ aus der Lösung der zweidimensionalen Laplace-Gleichung für ϕ folgt

$$\boxed{\Delta_t \phi = 0} \quad \text{Lösungsmethoden aus Elektrostatik bekannt}$$

TEM-Lösungen – Zusammenfassung

- Dispersionsrelation: $k = k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$
- Rotationsfreiheit in der Transversalebene: $\text{rot}_t \vec{\underline{E}} = \vec{0} \rightarrow \vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_t = -\text{grad}_t \phi$
- Laplace-Lösung: $\Delta_t \phi = 0$
- Aus der Transversalkomponente des Induktionsgesetz folgt zusammen mit der Dispersionsrelation

$$\underbrace{\text{grad}_t \underline{E}_z}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \vec{\underline{E}}_t}_{=\pm jk_0 \vec{\underline{E}}} = -j\omega \vec{e}_z \times \vec{\underline{B}}_t \Rightarrow \boxed{\vec{\underline{B}} = \mp \frac{k_0}{\omega} \vec{e}_z \times \vec{\underline{E}} = \mp \sqrt{\varepsilon\mu} \vec{e}_z \times \vec{\underline{E}}} \quad (\text{„+“} = \text{hin})$$

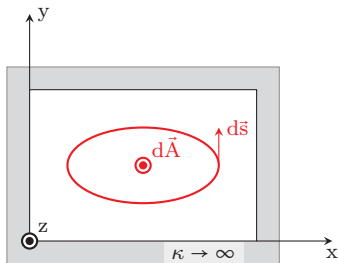
- Für das Magnetfeld schreibt sich diese Beziehung wieder mit der **Feldimpedanz** (Feldwellenwiderstand) $Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ als

$$\boxed{\vec{\underline{H}} = \mp \frac{1}{Z_0} \vec{e}_z \times \vec{\underline{E}}} \quad (\text{„+“} = \text{hin, orthogonales Rechtssystem})$$

- Wichtige Folgerung: Wegen $\text{rot}_t \vec{\underline{E}} = \vec{0}$ kann in den Transversalebene mit **Spannungen** im Sinne von Potentialdifferenzen gearbeitet werden.

Kein TEM-Mode im Hohlleiter

- In Strukturen mit **einfach zusammenhängender Querschnittsfläche** existiert kein TEM-Mode
- Ausführlich in E. Ledinegg, „Über die allgemeinste Lösung der Maxwell'schen Gleichungen in abgeschlossenen zylindrischen Räumen“, Annalen der Physik, Folge 5, Band 41, 537–566, 1942.
- Kurzbeweis durch Widerspruch:



- Betrachte Ampèresches Durchflutungsgesetz $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ entlang einer beliebigen magnetischen Feldlinie:

$$\oint_{O(A)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = j\omega\epsilon\mu \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} + \mu \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

- $\kappa \rightarrow \infty$: Feldlinie muss sich im Gebiet schließen
- Einfach zusammenhängend: Kein Strom durch Fläche
- Elektrisches Feld muss irgendwo z-Komponente haben oder Lösung ist die triviale Lösung.

TM- und TE-Lösungen

- Ausgangspunkt ist die **Helmholtzgleichung** für \vec{E} :

$$\Delta_t \vec{E} + (\omega^2 \epsilon \mu - k^2) \vec{E} = \Delta_t \vec{E} + \gamma^2 \vec{E} = \vec{0}$$

- Gleichungen für die Transversalkomponenten der Felder:

$$\vec{E}_t = \frac{j}{\omega^2 \epsilon \mu - k^2} [\mp k \text{grad}_t E_z + \omega \vec{e}_z \times \text{grad}_t B_z]$$

$$\vec{B}_t = \frac{j}{\omega^2 \epsilon \mu - k^2} [\mp k \text{grad}_t B_z - \omega \epsilon \mu \vec{e}_z \times \text{grad}_t E_z]$$

TM-Lösungen – $\underline{B}_z = 0$

- Betrachte z-Komponente der Helmholtzgleichung für \vec{E} :

$$\boxed{(\Delta_t + \gamma^2) \underline{E}_z = 0} \quad \text{mit Randbedingung } \underline{E}_z|_{O(V)} = 0$$

- Dieses **Dirichletsche Randwertproblem** kann mit den Methoden der Elektrostatik gelöst werden. $\rightarrow \underline{E}_z$ **bekannt**
- Transversalkomponente des elektrischen Feldes für $\underline{B}_z = 0$:

$$\vec{E}_t = \mp k \frac{j}{\gamma^2} \text{grad}_t \underline{E}_z \rightarrow \vec{E}_t \text{ **bekannt**}$$

- Transversalkomponente der magnetischen Flussdichte für $\underline{B}_z = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{B}_t &= \mu \vec{H}_t = -\frac{j}{\gamma^2} \omega \epsilon \mu \vec{e}_z \times \text{grad}_t \underline{E}_z \\ &= \pm \frac{\omega \epsilon \mu}{k} \vec{e}_z \times \vec{E}_t = \pm \mu \frac{1}{Z} \vec{e}_z \times \vec{E}_t \quad \text{mit } Z = \frac{k}{\omega \epsilon} = \frac{k}{k_0} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{k}{k_0} Z_0 \end{aligned}$$

- Damit ist auch die **magnetische Flussdichte im Lösungsvolumen bestimmt.**

TE-Lösungen – $\underline{E}_z = 0$

- Betrachte z-Komponente der Helmholtzgleichung für \underline{H} :

$$\boxed{(\Delta_t + \gamma^2) \underline{H}_z = 0} \text{ mit Randbedingung } \left. \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \underline{n}} \right|_{O(V)} = 0$$

- Dieses **Neumannsche Randwertproblem** kann mit den Methoden der Magnetostatik gelöst werden. → \underline{H}_z **bekannt**
- Transversalkomponente des magnetischen Feldes für $\underline{E}_z = 0$:

$$\underline{H}_t = \mp \frac{j}{\gamma^2} \mathbf{k} \operatorname{grad}_t \underline{H}_z \rightarrow \underline{H}_t \text{ **bekannt**}$$

- Transversalkomponente der elektrischen Feldes für $\underline{E}_z = 0$:

$$\underline{E}_t = \pm Z \underline{e}_z \times \underline{H}_t \text{ mit } Z = \frac{\mu\omega}{k} = \frac{k_0}{k} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{k_0}{k} Z_0$$

- Damit ist auch die **elektrische Feldstärke im Lösungsvolumen bestimmt**.

Diskussion der TM- und TE-Lösungen

- Für den **TEM-Mode** hatten wir schon gesehen, dass für ihn – wenn er existiert – die **Dispersionsrelation des TEM-Modes** erfüllt sein muss:

$$\gamma^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = k_0 = \omega \sqrt{\epsilon \mu}}$$

- Wenn der TEM-Mode existiert, existiert es für beliebige Frequenzen!
- Das ist bei TM- und TE-moden anders! Z.B. für den TM-Mode muss zunächst das Randwertproblem zur \underline{E}_z gelöst werden:

$$(\Delta_t + \gamma^2) \underline{E}_z = 0 \text{ mit } \underline{E}_z|_{O(V)} = 0$$

- Dies ist eine **Eigenwertgleichung** für die **Eigenfunktionen=Moden** $\underline{E}_{z\lambda}$ und den (diskreten) **Eigenwerten** γ_λ^2 mit $\lambda = 1, 2, 3, \dots$

$$(\Delta_t + \gamma_\lambda^2) \underline{E}_{z\lambda} = 0$$

- Für eine Kreisfrequenz ω gilt dann

$$\gamma_\lambda^2 = \mu \epsilon \omega^2 - k_\lambda^2 \Rightarrow k_\lambda = \sqrt{\mu \epsilon \omega^2 - \gamma_\lambda^2} \Rightarrow \boxed{k_\lambda = \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}} \text{ mit } \omega_\lambda = \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Cut-Off – Evaneszente Moden

- Wir haben die **Dispersionsrelation**

$$k_\lambda = \sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2} \quad \text{mit} \quad \omega_\lambda = \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- Die z-Abhängigkeit der Lösung ist (z.B. für das elektrische Feld)

$$\underline{\vec{E}}_\lambda(\vec{r}) = \underline{\vec{E}}_{0\lambda}(x, y) e^{\pm j k_\lambda z}$$

- Für $\omega < \omega_\lambda$ wird k_λ **imaginär** und die Lösung ist **keine propagierende Welle** mehr. Diese Lösungen sind **evaneszente Moden**:

$$\underline{\vec{E}}_\lambda(\vec{r}) = \underline{\vec{E}}_{0\lambda}(x, y) e^{\mp |k_\lambda| z} \quad \text{für} \quad \omega < \omega_\lambda$$

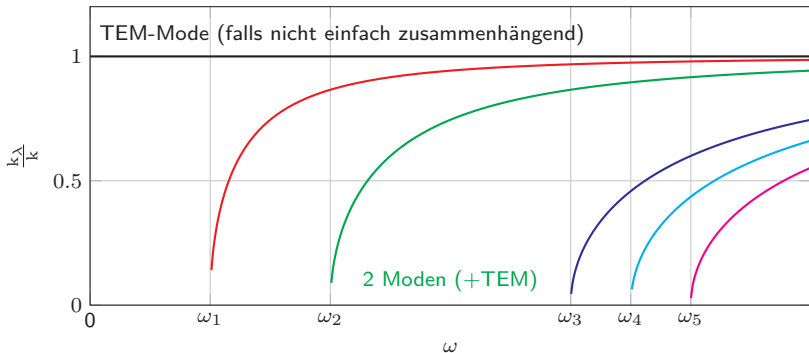
- Die (Kreis)-Frequenz $\omega_\lambda = 2\pi f_\lambda$ heißt **Cut-Off Frequenz** des Modes λ .

Dispersionsrelation

- Wir können die Dispersionsrelation $k_\lambda = \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}$ auf $k_0 = \sqrt{\mu\epsilon}\omega$ normieren:

$$\frac{k_\lambda}{k_0} = \sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}}$$

- Dies ergibt folgendes Bild:



Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten

- **Phasengeschwindigkeit** ist definiert als $v_p = \frac{\omega}{k}$
 - TEM-Mode $k_0 = \sqrt{\epsilon\mu}\omega$:

$$v_{p0} = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = v_c$$

- TM/TE-Mode $k_\lambda = \sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}$:

$$v_{p\lambda} = \frac{\omega}{k_\lambda} = \frac{v_{p0}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}}} = \frac{v_c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}}} \quad v_{p\lambda}(\omega \rightarrow \omega_\lambda) \rightarrow \infty \quad v_{p\lambda}(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow v_c$$

- **Gruppengeschwindigkeit** ist definiert als $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$
 - TEM-Mode $k_0 = \sqrt{\epsilon\mu}\omega$:

$$v_{g0} = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = v_{p0} = v_c$$

- TM/TE-Mode $k_\lambda = \sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}$:

$$v_{g\lambda} = \frac{\partial\omega}{\partial k_\lambda} = v_c \sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}} \quad v_{g\lambda}(\omega \rightarrow \omega_\lambda) = 0 \quad v_{g\lambda}(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow v_c$$

Modenentartung

- Gerade bei Querschnitten mit **hoher Symmetrie** (z.B. quadratischer Querschnitt) kommt es dazu, **Eigenwerte übereinstimmen**.
- Man spricht in diesem Fall von **Entartung**.
- In diesem Fall ergeben sich verschiedene **Eigenfunktionen** (Moden) zu identischen Grenzfrequenzen $\omega_{\lambda_1} = \omega_{\lambda_2}$
- Gibt es n Eigenlösungen zu einem Eigenwert spricht man von einer **n -fachen Entartung**
- Technisch ist es sehr häufig erwünscht, nur einen ausbreitungsfähigen Mode im Arbeitsbereich zu haben (**Single-Mode-Betrieb**)

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

TET: Wellenleiter II - Klassische Leitungstheorie

Theoretische Elektrotechnik

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

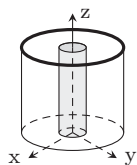
Klassische Leitungstheorie

- Die **klassische Leitungstheorie** dient der Beschreibung von **langen Leitungen** mittels **Strom und Spannung**.
- Von einer **langen Leitung** spricht man, wenn die Länge der Leitung nicht mehr als klein im Vergleich zur **Wellenlänge** angesehen werden kann.

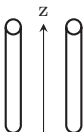
f	50 Hz	1 kHz	100 MHz	1 GHz	10 GHz
$\lambda_{\text{Vakuum}} = \frac{c}{f}$	5995.8 km	299.8 km	2.99 m	29.9 cm	2.9 cm

- Im einfachsten Fall wird die Leitung als **verlustlose, homogene Einfachleitung** angesehen. Es handelt sich also um einen **zylindrischen Wellenleiter**.
- Das Querschnittsgebiet ist **nicht einfach zusammenhängend** und daher existiert ein (quasi) TEM-Mode.
- Nur der TEM-Mode wird betrachtet: daher kann mit **Spannungen in der Transversalebene** gerechnet werden.
- Verallgemeinerungen bis hin zu einer **full-wave** Beschreibung sind möglich!
- Beispielstrukturen, die gerne mit Leitungstheorie beschrieben werden:

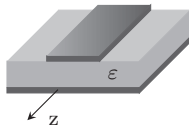
Koaxialkabel



Zweidrahtleitung
(Lecher-Leitung)



Mikrostreifenleitung



Ausgangspunkt

- Ziel ist die Entwicklung eines **Ersatzschaltbilds** für ein **differentielles Leitungselement**.
- Ausgangspunkt ist feldtheoretische Beschreibung für den **verlustlosen Fall**.
- Das Ersatzschaltbild kann dann einfach **verallgemeinert** werden.
- Maxwellgleichungen (lin. hom. iso. Dielektrikum, harmonische ZA, keine Quellen):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{\underline{\vec{E}}} &= 0 & \operatorname{rot} \underline{\underline{\vec{E}}} + j\omega\mu\underline{\underline{\vec{H}}} &= \vec{0} \\ \operatorname{div} \underline{\underline{\vec{H}}} &= 0 & \operatorname{rot} \underline{\underline{\vec{H}}} - j\omega\varepsilon\underline{\underline{\vec{E}}} &= \vec{0}\end{aligned}$$

- Wir betrachten nur den **TEM-Mode**. Die **Ausbreitungsrichtung** sei $\pm\vec{e}_z$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\text{TEM-Mode:} \quad & \underline{\underline{\vec{E}}} \cdot \vec{e}_z = 0 & \underline{\underline{\vec{H}}} \cdot \vec{e}_z &= 0 \\ & (\operatorname{rot} \underline{\underline{\vec{E}}}) \times \vec{e}_z = \frac{\partial \underline{\underline{\vec{E}}}}{\partial z} & (\operatorname{rot} \underline{\underline{\vec{H}}}) \times \vec{e}_z &= \frac{\partial \underline{\underline{\vec{H}}}}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\text{Transversalebene: } \operatorname{rot}_t \underline{\underline{\vec{E}}} = \left(\frac{\partial \underline{\underline{E}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{\underline{E}}_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \Rightarrow (\operatorname{rot}_t \underline{\underline{\vec{E}}}) \cdot \vec{e}_{x,y} = 0$$

Felder – Transversalebene ($z = \text{const.}$)

- Transversalkomponente des Induktionsgesetzes (in der Transversalebene):

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} + j\omega\mu\underline{\vec{H}} = \vec{0} \Rightarrow (\text{rot } \underline{\vec{E}}) \times \vec{e}_z + j\omega\mu\underline{\vec{H}} \times \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial z} + j\omega\mu\underline{\vec{H}} \times \vec{e}_z = \vec{0}$$

- Das elektrische Feld ist ein **Gradientenfeld** in allen Transversalebene. Ansatz:

$$\underline{\vec{E}} = -\text{grad } \phi(x, y) \vec{g}(z) \quad \text{mit} \quad \Delta\phi(x, y) = 0 \quad \text{statische 2D Laplace Gleichung}$$

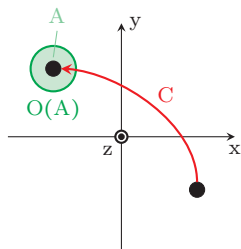
- Magnetfeld direkt ausrechnen:

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial z} + j\omega\mu\underline{\vec{H}} \times \vec{e}_z = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_z \times \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial z} + j\omega\mu \vec{e}_z \times (\underline{\vec{H}} \times \vec{e}_z) = \vec{0}$$

$$\underline{\vec{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\vec{e}_z \times \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial z} \right)$$

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{j\omega\mu} (\vec{e}_z \times \text{grad } \phi) \frac{\partial g}{\partial z}$$

Übergang zu Strom und Spannung



- Stromdichte konstant im Leiterquerschnitt → **Dünndrahtnäherung**
- Perfekte Leiter: $\kappa \rightarrow \infty$
- Rotationsfreiheit des elektrischen Felds in der Transversalebene → **Spannung:**

$$\underline{U} = \int_C \underline{\vec{E}} \cdot d\underline{\vec{s}} \quad \text{mit } z = \text{const. auf } C$$

- Aus dem Durchflutungsgesetz → **Strom:**

$$\underline{I} = \oint_{O(A)} \underline{\vec{H}} \cdot d\underline{\vec{s}}$$

- Damit können die Ausdrücke für die Felder umgeformt werden:

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial z} + j\omega\mu \underline{\vec{H}} \times \underline{\vec{e}}_z = \underline{\vec{0}} \quad \text{und} \quad \underline{\vec{H}} = \frac{1}{j\omega\mu} (\underline{\vec{e}}_z \times \text{grad } \phi) \frac{\partial g}{\partial z}$$

Übergang zu Strom und Spannung (...)

- Ausdrücke für die Felder:

$$\frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial z} + j\omega\mu \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{e}}_z = \vec{0} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{H}} = \frac{1}{j\omega\mu} (\underline{\underline{e}}_z \times \text{grad } \phi) \frac{\partial g}{\partial z}$$

- Wir bilden das Wegintegral der ersten Gleichung entlang C und setzen dann $\underline{\underline{H}}$ ein:

$$\int_C \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial z} \cdot d\vec{s} + j\omega\mu \int_C (\underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{e}}_z) \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \int_C \text{grad } \phi \cdot d\vec{s} = 0}$$

- Weiter gilt für den Strom:

$$\underline{I} = \oint_{O(A)} \underline{\underline{H}} \cdot d\vec{s} = \oint_{O(A)} \frac{1}{j\omega\mu} (\underline{\underline{e}}_z \times \text{grad } \phi) \frac{\partial g}{\partial z} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial z} = j\omega\mu \frac{\underline{I}}{\oint_{O(A)} (\underline{\underline{e}}_z \times \text{grad } \phi) \cdot d\vec{s}}}$$

Übergang zu Strom und Spannung (...)

- Wir betrachten die Formeln

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \int_C \text{grad } \phi \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = j\omega\mu \frac{\underline{I}}{\oint_{O(A)} (\vec{e}_z \times \text{grad } \phi) \cdot d\vec{s}}$$

- Einsetzen der rechten in die linke Gleichung eliminiert offensichtlich die unbekannte Funktion $g(z)$ und wir erhalten die **erste Leitungsgleichung** (Telegraphengleichung):

$$\frac{\partial \underline{U}(z)}{\partial z} + j\omega \underbrace{\frac{\mu \int_C \text{grad } \phi \cdot d\vec{s}}{\oint_{O(A)} (\vec{e}_z \times \text{grad } \phi) \cdot d\vec{s}}}_{L'} \underline{I}(z) = \frac{\partial \underline{U}(z)}{\partial z} + j\omega L' \underline{I}(z) = 0 \quad [L'] = \text{H m}^{-1}$$

- Der **Induktivitätsbelag** der Leitung L' ist vollständig bestimmt durch die Lösung des statischen 2D Laplace-Randwertproblems für ϕ im Lösungsvolumen V

$$\Delta\phi(x, y) = 0 \quad \text{mit } \phi = 0 \text{ auf einem Leiter und } \phi = U(z) \text{ auf dem anderen Leiter}$$

Übergang zu Strom und Spannung (...)

- Analog folgt die **zweite Leitungsgleichung** aus den Formeln:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial z} - j\omega \varepsilon \vec{E} \times \vec{e}_z = \vec{0} \text{ und } \vec{E} = -\text{grad } \phi \text{ g}(z)$$

- Umlaufintegral der ersten Gleichung entlang $O(A)$ und Einsetzen von \vec{E} ergibt:

$$\oint_{O(A)} \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \cdot d\vec{s} - j\omega \varepsilon \oint_{O(A)} (\vec{E} \times \vec{e}_z) \cdot d\vec{s} = 0$$
$$\frac{\partial I}{\partial z} - j\omega \varepsilon \text{g}(z) \oint_{O(A)} (\vec{e}_z \times \text{grad } \phi) \cdot d\vec{s} = 0$$

- Die Funktion $\text{g}(z)$ folgt sofort aus \underline{U} :

$$\underline{U} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\text{g}(z) \int_C \text{grad } \phi \cdot d\vec{s} \rightarrow \text{g}(z) = -\frac{\underline{U}}{\int_C \text{grad } \phi \cdot d\vec{s}}$$

- Damit lautet die **zweite Leitungsgleichung**:

$$\frac{\partial I}{\partial z} + j\omega \underbrace{\frac{\varepsilon \oint_{O(A)} (\vec{e}_z \times \text{grad } \phi) \cdot d\vec{s}}{\int_C \text{grad } \phi \cdot d\vec{s}}}_{C'} \underline{U} = 0 \quad [C'] = \text{F m}^{-1}$$

Leitungsgleichungen – Leitungsbeläge

- Zusammenfassend haben wir für verlustlose Leitungen die folgenden **Leitungsgleichungen** gefunden:

$$\frac{\partial \underline{U}(z)}{\partial z} + j\omega L' \underline{I}(z) = 0$$

$$L' = \frac{\mu \int_C \text{grad } \phi \cdot d\vec{s}}{\oint_{O(A)} (\vec{e}_z \times \text{grad } \phi) \cdot d\vec{s}}$$

$$\frac{\partial \underline{I}(z)}{\partial z} + j\omega C' \underline{U}(z) = 0$$

$$C' = \frac{\varepsilon \oint_{O(A)} (\vec{e}_z \times \text{grad } \phi) \cdot d\vec{s}}{\int_C \text{grad } \phi \cdot d\vec{s}}$$

- Offensichtlich gilt

$$L' C' = \varepsilon \mu = \frac{1}{v_p^2} \Rightarrow v_p = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

- Entkoppelte Gleichungen:

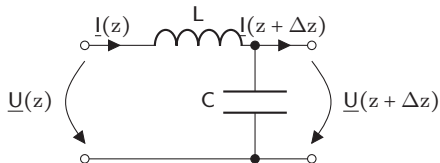
$$\frac{\partial^2 \underline{U}(z)}{\partial z^2} + \omega^2 L' C' \underline{U}(z) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{I}(z)}{\partial z^2} + \omega^2 L' C' \underline{I}(z) = 0$$

- Die Lösungen sind (natürlich) vor- und zurücklaufende Wellen (als ruhende Zeiger):

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_0 e^{\pm jkz} \quad \text{und} \quad \underline{I}(z) = \underline{I}_0 e^{\pm jkz}$$

Übergang zum Ersatzschaltbild

- Maschensatz:

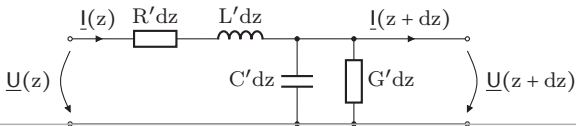


$$\begin{aligned} \underline{U}(z) &= j\omega L \underline{I}(z) + \underline{U}(z + \Delta z) \\ \underline{U}(z + \Delta z) - \underline{U}(z) + j\omega L \underline{I}(z) &= 0 \\ \frac{\Delta \underline{U}}{\Delta z} + j\omega \frac{L}{\Delta z} \underline{I}(z) &= 0 \end{aligned}$$

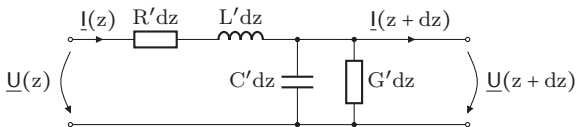
- Knotensatz:

$$\underline{I}(z + \Delta z) = \underline{I}(z) - j\omega C \underline{U}(z + \Delta z) \Rightarrow \frac{\Delta \underline{I}}{\Delta z} + j\omega \frac{C}{\Delta z} \underline{U}(z + \Delta z) = 0$$

- Im Grenzfalle $\Delta z \rightarrow 0$ und mit $C' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{C}{\Delta z}$ und $L' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{L}{\Delta z}$ ist der obige Vierpol das **Ersatzschaltbild eines differentiellen Stückes einer verlustlosen Leitung**.
- Verallgemeinerung für **verlustbehaftete** Leitungen:



Verlustbehaftete Leitungen



- Aus dem Ersatzschaltbild ergeben sich die **Leitungsgleichungen für verlustbehaftete Leitungen**.

$$\frac{\partial \underline{U}(z)}{\partial z} + (R' + j\omega L') \underline{I}(z) = 0$$

$$L' = \frac{\mu \int_C \text{grad } \phi \cdot d\vec{s}}{\oint_{O(A)} (\vec{e}_z \times \text{grad } \phi) \cdot d\vec{s}}$$

$$\frac{\partial \underline{I}(z)}{\partial z} + (G' + j\omega C') \underline{U}(z) = 0$$

$$C' = \frac{\varepsilon \oint_{O(A)} (\vec{e}_z \times \text{grad } \phi) \cdot d\vec{s}}{\int_C \text{grad } \phi \cdot d\vec{s}}$$

- Der **Widerstandsbelag** R' entspricht den ohmschen Leitungsverlusten pro Längeneinheit.
- Der **Leitwertbelag** G' entspricht den dielektrischen Verlusten pro Längeneinheit.
- Zusammengefasst spricht man auch vom **Impedanzbelag** $Z' = R' + j\omega L'$ und vom **Admittanzbelag** $Y' = G' + j\omega C'$

Allgemeine Lösung – Leitungswellenwiderstand

- Wir können die entkoppelten Leitungsgleichungen jetzt auch allgemein hinschreiben:

$$\frac{\partial^2 \underline{U}(z)}{\partial z^2} - Z'Y' \underline{U}(z) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{I}(z)}{\partial z^2} - Z'Y' \underline{I}(z) = 0$$

- Ansatz:

$$\underline{U}(z) = u e^{\pm \gamma z} \Rightarrow \gamma = \sqrt{Z'Y'} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad \text{Ausbreitungskonstante}$$

- Mit der Spannung $\underline{U}(z) = u_1 e^{-\gamma z} + u_2 e^{\gamma z}$ ergibt sich der Strom zu

$$\underline{I}(z) = -\frac{1}{Z'} \frac{\partial \underline{U}(z)}{\partial z} = \frac{\gamma}{Z'} (u_1 e^{-\gamma z} - u_2 e^{\gamma z}) = \frac{1}{Z_L} (u_1 e^{-\gamma z} - u_2 e^{\gamma z})$$

- Hierbei ist Z_L der **Leitungswellenwiderstand**:

$$Z_L = \frac{Z'}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

- Abschluss mit Leitungswellenwiderstand → Eingangsimpedanz =
Leitungswellenwiderstand → **keine Reflexion**

Matrixschreibweise – Mehrfachleitungen

- Die gefundenen Leitungsgleichungen werden üblicherweise in eine **Matrixgleichung** zusammengefasst:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \underline{U}(z)}{\partial z} + (R' + j\omega L') \underline{I}(z) &= 0 \\ \frac{\partial \underline{I}(z)}{\partial z} + (G' + j\omega C') \underline{U}(z) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \underline{U}(z) \\ \underline{I}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Z' \\ Y' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}(z) \\ \underline{I}(z) \end{pmatrix} = 0$$

- Die Matrixgleichung ist sofort für **Mehrfachleitungen** verallgemeinbar. Hierzu bilden wir
 - den Vektor der Spannungen relativ zum Bezugsleiter $\vec{\underline{U}}(z) = (\underline{U}_1(z), \dots, \underline{U}_n(z))^T$.
 - den Vektor der Ströme im Leiter $\vec{\underline{I}}(z) = (\underline{I}_1(z), \dots, \underline{I}_n(z))^T$.
 - die Matrix mit den Impedanzbelägen in der Hauptdiagonalen (Z')
 - die Matrix mit den Admittanzbelägen in der Hauptdiagonalen (Y')

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \vec{\underline{U}}(z) \\ \vec{\underline{I}}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (Z') \\ (Y') & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\underline{U}}(z) \\ \vec{\underline{I}}(z) \end{pmatrix} = 0$$

Bemerkungen

- Die Leitungstheorie kann hier nur angerissen werden.
- Die Anwendungen sind extrem vielfältig: Beschreibung von Leitungen, Impedanztransformationen, Anpassungen, Filter, . . .
- Vierpolparameter: Z , S , Y → bekannt aus Grundlagen (Vierpole)
- **Ungleichförmige Leitungen**: ortsabhängigen Leitungsbeläge
- Wichtigste Einschränkung der klassischen Leitungstheorie: **nur TEM-Mode**
- Deshalb auch: Abstrahlung und Einkopplung in Leitungen nur bedingt beschreibbar.
- Lösung: **Transmission Line Super Theory (TLST)**, z.B. F. Ossevorth, R. Jacobs, H.G. Krauthäuser, „A full wave description for thin wire structures with TLST and perturbation theory“, Advances in Radio Science (16), 123–133, 2018.
<https://ars.copernicus.org/articles/16/123/2018/>, DOI = 10.5194/ars-16-123-2018 und dort zitierte Arbeiten (insbesondere: S. Tkachenko und J. Nitsch)

- Dieses Handout, mit Ausnahme der über Quellangaben gekennzeichneten Teile, steht unter der Lizenz CC BY 3.0 DE.
Details hierzu finden Sie unter <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.de>.
- Diese Datei wurde erstellt am: 2025-07-28 15:28:36+02:00
Die jeweils neueste Version finden Sie hier im Ordner „Theoretische Elektrotechnik“: <https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/27455913992/CourseNode/103138906469436>
- Wenn Sie einen Fehler entdecken, freue ich mich über einen kurzen Hinweis an <mailto:tetemv@tu-dresden.de>!
- Das Video zu dieser Lerneinheit (und zu weiteren) finden Sie entweder auf dem Videocampus Sachsen (<https://videocampus.sachsen.de/album/view/aid/287>) oder auf YouTube (<https://www.youtube.com/c/TET4TUD>).