

## Musterlösung

**Aufgabe:** Man berechne die 1001-te Potenz, also  $z^{1001}$  von

$$z = -1 + i.$$

Zunächst müssen wir  $z$  in trigonometrischer Form darstellen. Dazu berechnen wir zunächst den Betrag von  $z$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Merke, **der Imaginärteil von  $z = x + iy$  ist  $y$  und nicht  $iy$ , es gilt  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  und nicht  $r = \sqrt{x^2 - y^2}$ .**

Nun berechnen wir den Winkel  $\varphi$ ,

(i) entweder aus dem Arkustangens, in diesem Fall gilt

$$\arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{-1}{1} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Die komplexe Zahl  $z$  liegt aber im 2. Quadranten, da  $x < 0$  und  $y > 0$  ist. Deshalb ist

$$\varphi = \pi + \arctan(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

(ii) Würde man nicht den Arkustangens, sondern den Arkuskosinus verwenden, so ergäbe sich:

$$\arccos \frac{x}{r} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = \arccos \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Da  $z$  im 2. Quadranten liegt, ist also  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ .

Damit haben wir die trigonometrische Darstellung

$$z = -1 + i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

erhalten.

Das Potenzieren geht nun ganz einfach:

$$\begin{aligned} z^{1001} &= \left( \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right)^{1001} = \sqrt{2}^{1001} \left( \cos \frac{3003\pi}{4} + i \sin \frac{3003\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2}^{1001} \left( \cos \left( 750\pi + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( 750\pi + \frac{3\pi}{4} \right) \right) \\ &= \sqrt{2}^{1001} \left( \cos \left( 375 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( 375 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4} \right) \right) \\ &= \sqrt{2}^{1001} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right) \\ &= 2^{500} \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right) = 2^{500} z = 2^{500} (-1 + i). \end{aligned}$$