Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Michael Meinhold

Dresden, 1. Dezember 2023

Mathematik für Ingenieure - WS2023/24
Übungsblatt 9

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Gegeben seien die nichtlineare Differentialgleichung 1-ter Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{x + y(x)^2}{x^2 + \frac{1}{4}} \tag{1}$$

in der gesuchten Funktion

$$x \mapsto y(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}$$

und die Anfangswertbedingung $y(-0.5) = 0$. In Abbildung 1 ist das Richtungsvektorfeld der Differentialgleichung (1) dargestellt.

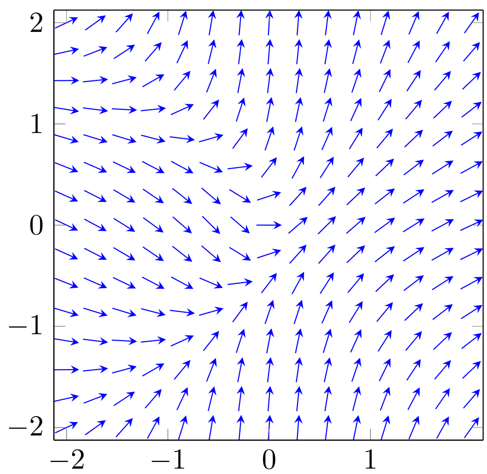

Abbildung 1: Richtungsvektorfeld der Differentialgleichung in Formelzeile (1).

(a) Zeigen Sie, dass die Isokline zum Wert $m = y'(x) = 0$ eine Parabel ist. Skizzieren Sie diese in Abbildung 1.

(b) Zeigen Sie, dass die Gerade zur Gleichung

$$y = x - \frac{1}{2} \tag{2}$$

eine Isokline beschreibt. Bestimmen Sie den Isoklinenwert $m = y'(x)$. Skizzieren Sie diese in Abbildung 1.

(c) Berechnen Sie näherungsweise den Ordinatenwert der Lösungskurve des Anfangswertproblems an der Stelle $x^* = 0.7$ unter Verwendung des Streckenzugverfahrens nach Euler mit einer Schrittweite von $h = 0.2$. Geben Sie das Ergebnis auf vier Nachkommastellen gerundet an.

(d) Führen Sie eine Zweitrechnung mit doppelter Schrittweite durch und geben Sie eine Schätzung des globalen Fehlers für den Ordinatenwert in x^* an.

Aufgabe 2: Gegeben ist eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cdot y^{(k)}(x)\right) + a_0 \cdot y(x) = q(x), \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ für alle } k \in \{0,1,2,\ldots,n\}, \;\; a_n \neq 0 \tag{3}$$

in der gesuchten Funktion $x \mapsto y = f(x)$ mit $x \in D \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Nennen Sie für die nachstehenden Störfunktionen $x \mapsto q(x)$, $x \in D$ Lösungen λ der charakteristschen Gleichung, für welche mathematische Resonanz vorliegt.

(i) $q(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot x^k$ mit $b_k \in \mathbb{R}$, $b_0 \in \mathbb{R}$ und $b_m \neq 0$
(ii) $q(x) = k \cdot \exp(ax)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$
(iii) $q(x) = k_1 \cdot \cos(bx)$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $k_1 \in \mathbb{R}$
(iv) $q(x) = k_2 \cdot \sin(bx)$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $k_2 \in \mathbb{R}$
(v) $q(x) = k_1 \cdot \cos(bx) + k_2 \cdot \sin(bx)$ mit $b \in \mathbb{R}$, $k_1 \in \mathbb{R}$ und $k_2 \in \mathbb{R}$
(vi) $q(x) = k_1 \cdot \exp(ax) \cdot \cos(bx)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $k_1 \in \mathbb{R}$
(vii) $q(x) = k_2 \cdot \exp(ax) \cdot \sin(bx)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $k_2 \in \mathbb{R}$
(viii) $q(x) = \exp(ax) \cdot (k_1 \cdot \cos(bx) + k_2 \cdot \sin(bx))$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $k_1 \in \mathbb{R}$ und $k_2 \in \mathbb{R}$

(b) Geben Sie einen Ansatz $y_s(x)$ für sine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3) in Teilaufgabe (a) an, wenn λ eine r-fache Lösung der charakteristischen Gleichung (3) ist.

Aufgabe 3: Führen Sie das System von linearen Differentialgleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc} \dot{x}(t) & + & x(t) & + & 2 \cdot \dot{y}(t) & + & 2 \cdot y(t) & = & e^t \\ \dot{x}(t) & + & & & \dot{y}(t) & - & y(t) & = & 0 \end{array} \tag{4}$$

von jeweils erster Ordnung in den gesuchten Funktionen

$$t \mapsto x(t),\; t \in D \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad t \mapsto y(t),\; t \in D$$

in eine Differentialgleichung einer Funktion von maximal 2-ter Ordnung über und ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Systems.

Aufgabe 4: Berechnen Sie mithilfe eines geeigneten Verfahrens die allgemeinen Lösungen der folgenden Systeme von Differentialgleichungen.

(a) $\left\{ \begin{array}{l} y_1'(x) = 4 \cdot y_1(x) + 12 \cdot y_2(x) \\ y_2'(x) = 1 \cdot y_1(x) + 5 \cdot y_2(x) \end{array} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) - y(t) + z(t) = 0 \\ \dot{y}(t) + 2 \cdot x(t) - z(t) = 0 \\ \dot{z}(t) - 2 \cdot x(t) + y(t) = 0 \end{array} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{array}{l} y_1'(x) = 2 \cdot y_1(x) + 4 \cdot y_2(x) + \cos x \\ y_2'(x) = \sin x - y_1(x) - 2 \cdot y_2(x) \end{array} \right\}$

Anleitung: Matrixansatz zur Lösung eines linearen Gleichungssystems von Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Beispiel: Lineare homogene Systeme $\dot{\mathbf{y}}(t) = A \cdot \mathbf{y}(t)$ mit drei Gleichungen, d. h.

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= a_{11} \cdot x(t) + a_{12} \cdot y(t) + a_{13} \cdot z(t) \\
\dot{y}(t) &= a_{21} \cdot x(t) + a_{22} \cdot y(t) + a_{23} \cdot z(t) \\
\dot{z}(t) &= a_{31} \cdot x(t) + a_{32} \cdot y(t) + a_{33} \cdot z(t).
\end{aligned} \tag{5}$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ die Einträge der Matrix A sind.

(a) Wähle die vektorwertige Ansatzfunktion $\mathbf{y}(t) = \mathbf{d} \cdot e^{\lambda \cdot t}$ mit

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

wobei d_1, d_2, d_3 und λ zu bestimmende reelle Parameter sind. Bilde die erste Ableitung

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{d} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t}.$$

und setze in das Differentialgleichungssystem (5) ein. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{d} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} = A \cdot \mathbf{d} \cdot e^{\lambda \cdot t} \\
\Leftrightarrow \quad & e^{\lambda \cdot t} \cdot (A - \lambda \cdot E) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{o}
\end{aligned} \tag{6}$$

worin E die dreireihige Einheitsmatrix und $\mathbf{o}$ den Nullvektor in $\mathbb{R}^3$ bezeichnen.

(b) Der Ausdruck $(A - \lambda \cdot E) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{o}$ in Gleichung (6) stellt ein homogenes lineares Gleichungssystem vom Typ $(3; 3)$ in den Komponenten von $\mathbf{d}$ dar. Für dieses existieren vom Nullvektor $\mathbf{d} = \mathbf{o}$ verschiedene Lösungen, falls die Matrix $A - \lambda \cdot E$ nicht maximalen Rang hat, d. h.

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \left| \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0. \tag{7}$$

Die Gleichung (7) heißt **charakteristische Gleichung** von A.[1]

Löse die charakteristische Gleichung. Es sind möglich:

- drei reelle, paarweise verschiedene Lösungen λ_i.
- drei reelle Lösungen, von denen eine doppelt auftritt, etwa $\lambda_1 = \lambda_2$, aber $\lambda_1 \neq \lambda_3$
- eine dreifach auftretende reelle Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$
- zwei komplex konjugierte Lösungen λ_1, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ sowie eine reelle Lösung λ_3.

(c) Die allgemeine Lösung $\mathbf{y}(t)$ ergibt sich entsprechend der erhaltenen Lösungen λ_i:

- Für $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ ist:

  $$\mathbf{y}(t) = \mathbf{d}_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \mathbf{d}_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \mathbf{d}_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot t}$$

  worin $\mathbf{d}_i$ den Eigenvektorraum zum Eigenwert λ_i bilden.

- Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ und $\lambda \neq \lambda_3$ ist:

  $$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda \cdot t} + \mathbf{d}_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot t}$$

  worin $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}_2$ den Eigenvektorraum zum Eigenwert λ bilden etc.

[1] Gleichung (7) taucht im Zusammenhang der Berechnung von Eigenwerten einer quadratischen Matrix auf.

- Für $\lambda_1 = a + \mathrm{i}b$, $\lambda_2 = a - \mathrm{i}b$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^\times)$ und $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ ist:

  $$\mathbf{y}(t) = e^{a\cdot t}\left(\mathbf{d}_1 \cdot \cos(bt) + \mathbf{d}_2 \cdot \sin(bt)\right) + \mathbf{d}_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot t}.$$

  Der Vektor $\mathbf{d}_3$ wird erneut als Eigenvektorraum zu λ_3 gebildet. Die Koeffizienten $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}_2$ lassen sich mittels Koeffizientenvergleich aus (5) nach Einsetzen der Lösungsfunktion und deren Ableitung ermitteln.

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Gegeben seien das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \cos\left(x^2 + y(x)\right), \quad y(0) = \frac{1}{4}. \tag{8}$$

(a) Berechnen Sie näherungsweise mithilfe des Streckenzugverfahrens nach Euler ($h = 0.05$, auf vier Nachkommastellen gerundet) die Lösungskurve von (8) im Intervall $[0, 0.3]$.

(b) Skizzieren Sie den Streckenzug im Intervall $[0, 0.3]$.

(c) Führen Sie eine Zweitrechnung mit doppelter Schrittweite $2h$ durch und schätzen Sie den Verfahrensfehler.

Aufgabe 6: Untersuchen Sie mithilfe der Schwingungsgleichung

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = 0$$

die Bewegung einer Masse von $m = 50\mathrm{k}g$, die mit einer elastischen Feder der Federkonstanten $c = 10200\mathrm{N}/m$ verbunden ist, wenn das System die Dämpferkonstante $b = 2000\mathrm{k}g/s$ besitzt.

Für die Bewegung werden die Anfangsbedingungen $x(0) = 0\mathrm{m}$ und $\dot{x}(0) = 2.8\mathrm{m}/s$ angenommen. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf dieser aperiodischen Bewegung.

Aufgabe 7: Gegeben sei das System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{array}{ccccccccccc} y_1'' & + & y_1' & & & + & y_2'' & & & - & y_2 & = & e^x \\ y_1'' & + & 2\cdot y_1' & - & y_1 & - & y_2'' & + & y_2' & & & = & -e^{-x} \end{array} \tag{9}$$

in den Funktionen $x \mapsto y_1(x)$ und $x \mapsto y_2(x)$ mit $x \in D$.

(a) Führen Sie das System (9) in eine Differentialgleichung von max. 4. Ordnung über und berechnen Sie deren allgemeine Lösung.

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (9).