Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Frank Henschel, Michael Meinhold

Dresden, 28. Oktober 2020

Mathematik 1 - WS2022/23
Übungsblatt 5

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die arithmetischen Darstellungen der folgenden komplexen Zahlen z

(a) $z = \dfrac{3+4\mathrm{i}}{5} + \dfrac{5}{3+4\mathrm{i}}$

(b) $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} + 1$

(c) $z = \dfrac{(2+\mathrm{i})^3}{2-3\mathrm{i}}$

(d) $z = \dfrac{3+6\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}^3} - \dfrac{10\mathrm{i}^4}{(1+\mathrm{i})^2}$

worin i mit $\mathrm{i}^2 = -1$ die imaginäre Einheit bezeichnet.

Anmerkung: Die in der Aufgabe benannte arithmetische Darstellung entspricht der Bezeichnung 'kartesische Darstellung' aus der Vorlesung.

Aufgabe 2:

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen durch Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dar.

$z_1 = 3 - 4\mathrm{i}$ $\quad$ $z_2 = -2 + 3\mathrm{i}$ $\quad$ $z_3 = -5 - 2\mathrm{i}$

$z_4 = 3$ $\quad$ $z_5 = -\frac{3}{2}\mathrm{i}$ $\quad$ $z_6 = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\mathrm{i}\right)$

$z_7 = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\mathrm{i}$ $\quad$ $z_8 = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\mathrm{i}$

(b) Bestimmen Sie in der Gaußschen Zahlenebene (siehe Abbildung 1) die durch Zeiger dargestellten komplexen Zahlen.

Aufgabe 3:

(a) Bestimmen Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, für welche die komplexen Zahlen

$$z_1 = (3a-5) + (a+b^2)\mathrm{i} \quad \text{und} \quad z_2 = (2a-7) - (3a+7)\mathrm{i}$$

gleich sind.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die $z = \bar{z}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass genau für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) = 0$ gilt: $z = -\bar{z}$.

Aufgabe 4: Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 3\mathrm{i}$ und $z_2 = 5 - 2\mathrm{i}$.

(a) Berechnen Sie $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$.

(b) Geben Sie zu z_1 und z_2 jeweils die Inversen bezüglich der Addition und Multiplikation in der kartesischen Form $a + \mathrm{i}b$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$ an.

(c) Berechnen Sie $(z_1 + \mathrm{i}z_2)^3$.

Wiederholen Sie die Aufgaben (a) bis (c) für die Zahlenpaare

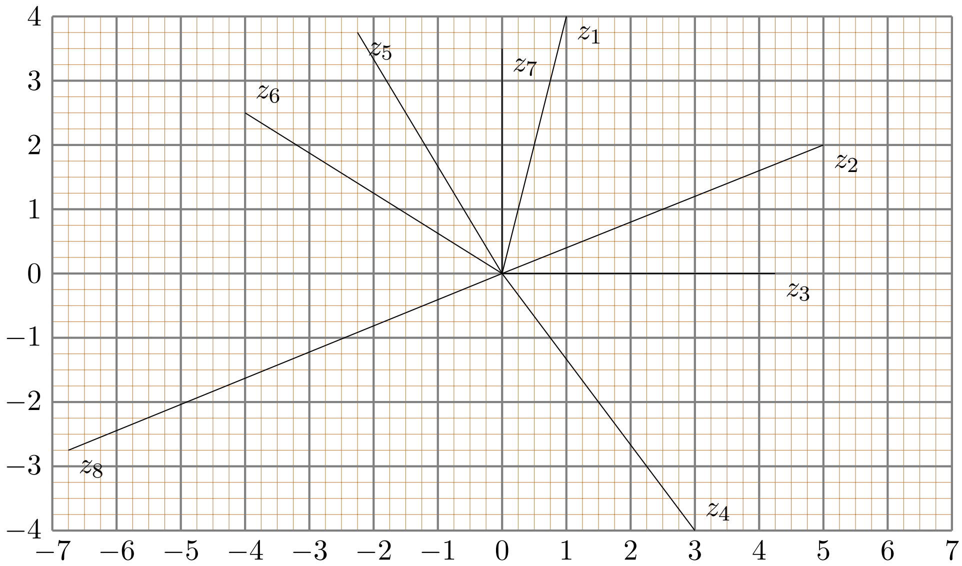

Abbildung 1: Komplexe Zahlen $z_i \in \mathbb{C}$ mit $i \in \{1; 2; \ldots; 8\}$, die durch Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt sind. (Die Pfeilspitzen liegen auf dem Gitterraster.)

(i) $z_1 = \sqrt{3} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathfrak{i} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ und $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathfrak{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

(ii) $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \mathfrak{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ und $z_2 = 2\sqrt{3} - 2\mathfrak{i}$.

Hinweis: Wandeln Sie hierfür - wo nötig - die komplexen Zahlen in eine geeignete Darstellungsform um.

Aufgabe 5: Gegeben sind zwei beliebige komplexe Zahlen $z_j \neq 0$, $j \in \{1, 2\}$, in Polardarstellung

$$z_j = |z_j| \left(\cos\varphi_j + \mathfrak{i}\sin\varphi_j\right), \ |z_j| \in \mathbb{R}^+, \ \varphi_j \in (-\pi, \pi]$$

(a) Berechnen Sie den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ und vereinfachen Sie das Ergebnis unter Verwendung der Additionstheoreme für Winkelfunktionen.

(b) Formulieren Sie eine Regel für die Division komplexer Zahlen in Polardarstellung. [1]

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$, so dass für die komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z = \left(x^2 + 2x - 3\right) + \mathfrak{i}\left(x^2 - 4\right) \qquad \left(\mathfrak{i}^2 = -1\right)$$

gelten: (a) $\Re(z) = 0$ (b) $\Im(z) = 0$. Geben Sie die Zahlen z an.

[1]Die Regel kann in Analogie zu der für die Multiplikation komplexer Zahlen, die in Polardarstellung gegeben sind, formuliert werden.

Aufgabe 7: Kennzeichnen Sie in der Gauß´schen Zahlenebene die nachstehenden Teilmengen komplexer Zahlen $z \in \mathbb{C}$.

(a) $M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathfrak{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \text{ mit } r \in \mathbb{R}^+ \right\}$

(b) $M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \left(\frac{5}{2}\cos\varphi + 1\right) + \mathfrak{i} \cdot \frac{5}{2}\sin\varphi \text{ mit } \varphi \in [0, \pi] \right\}$

(c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$

(d) $M_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \in (-1, 3]\}$

(e) $M_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \leq 5\}$

Aufgabe 8: Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen z jeweils die gesuchten Größen.

(a)	$z = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) - \mathfrak{i}\,\sin(\frac{\pi}{3}))$	ges.: trigonometrische Form, $\mathrm{Re}(z),\ \mathrm{Im}(z)$
(b)	$z = -3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$	ges.: z und $\overline{z}$ in exponentieller Form
(c)	$z = \left(e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} + \sqrt{3}\right) \cdot \mathfrak{i}$	ges.: $\mathrm{Re}(z),\ \mathrm{Im}(z),\ \lvert z\rvert,\ \mathrm{Arg}(z)$
(d)	$z = \dfrac{1 - e^{\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}}}{1 + \mathfrak{i} \cdot e^{-\pi\mathrm{i}}}$	ges.: arithmetische und exponentielle Form