

---

## Algebra und höhere Mathematik 1 für Medieninformatik - WS2022/23

### Übung 6: Vollständige Induktion

---

#### Aufgaben mit Lösungshilfe

Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise und -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

---

#### Aufgabe 1:

(a) Lösen Sie die folgenden Summenzeichen auf:

$$(i) \sum_{i=-2}^2 3(i^2)$$

$$(ii) \sum_{i=14}^{40} 3$$

$$(iii) \sum_{i=7}^{17} (22 - i)^{-1}$$

$$(iv) \sum_{i=1}^{10} (-1)^i (i - 1)$$

$$(v) \sum_{i=1}^{100} i$$

$$(vi) \sum_{i=3}^7 \ln(i^9)$$

(b) Lösen Sie die folgenden Produktzeichen auf:

$$(i) \prod_{i=1}^{10} i$$

$$(ii) \prod_{i=3}^6 (i - 1)x$$

$$(iii) \prod_{j=0}^{50} x^j,$$

$$(iv) \prod_{k=0}^{42} 4k^2 x^{2k}$$

$$(v) \prod_{k=-2}^2 2^k$$

$$(vi) \prod_{j=1}^3 \left( 2j \prod_{k=2}^4 kj \right)$$

**Aufgabe 2:** Gegeben sind die nachstehenden Zahlenfolgen  $n \mapsto a_n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$ , durch Angabe ihrer Glieder in der Form

$$(i) -4, -1, 2, 5, \dots \quad (ii) \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \quad (iii) \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, \dots \quad (iv) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Geben Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift der dargestellten Zahlenfolgen  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  an.

**Aufgabe 3:** Gegeben sind die nachstehenden Zahlenfolgen  $n \mapsto a_n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$ , durch Angabe einer expliziten Bildungsvorschrift der Form

$$(i) n \mapsto a_n = (-1)^n \frac{2}{n+3}$$

$$(ii) n \mapsto a_n = \frac{2}{3^n}$$

$$(iii) n \mapsto a_n = \frac{4n^2 - 5n}{8n^2 - 6n + 1}$$

$$(iv) n \mapsto a_n = \frac{\cos(n^2)}{8n^2 - 6n + 1}$$

$$(v) n \mapsto a_n = \sqrt{\frac{3n^3 + n}{2n + 1}}$$

Geben Sie die Folgenglieder 3te bis 6te Folgenglied an.

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 5:

- (a) Zeigen Sie die Rekursionsformel für den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

für  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ . Nutzen Sie dafür die Definition über Fakultäten.

- (b) Beweisen Sie den Binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  mit Hilfe der vollständigen Induktion und der Rekursionsformel aus (a).

### Selbstständige Bearbeitung

Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den „Aufgaben mit Lösungshilfe“ an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

---

### Aufgabe 6:

- (a) Lösen Sie die folgenden Summenzeichen auf:

(i)  $\sum_{i=-2}^2 3 \cdot i^2$

(ii)  $\sum_{i=13}^{17} (22-i)^{-1}$

(iii)  $\sum_{i=1}^4 (1+i)x^i$

- (b) Lösen Sie die folgenden Produktzeichen auf:

(i)  $\prod_{i=1}^{10} i$

(ii)  $\prod_{k=-2}^2 2^k$

**Aufgabe 7:** Gegeben sei die Folge der Fibonacci-Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+2} := a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 0).$$

- (a) Geben Sie alle Fibonacci-Zahlen  $a_k$  für  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$  an.  
(b) Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_+$  die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

gilt. Verwenden Sie hierfür das Beweisverfahren der vollständigen Induktion.

**Aufgabe 8:** Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{1}{2} \cdot (3^{n+1} - 1)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt.

**Aufgabe 9:**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Ungleichung

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ .