Zahlenmengen

Ausblick: Zahlkörper

In $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sind jeweils die Operationen der Addition und Multiplikation erklärt. Es gelten die folgenden Rechengesetze:

1.	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$	Kommutativität bezüglich $(+)$
2.	$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$	Kommutativität bezüglich $(\cdot)$
3.	$x + 0 = 0 + x = x$	Neutrales Element bezüglich $(+)$
	$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$	Neutrales Element bezüglich $(\cdot)$
4.	$\forall x \; \exists -x : \; x + (-x) = 0$	Inverses Element bezüglich $(+)$
5.	$\forall x \neq 0 \; \exists x^{-1} : \; x \cdot (x^{-1}) = 1$	Inverses Element bezüglich $(\cdot)$
6.	$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$	Assoziativität bezüglich $(+)$
7.	$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$	Assoziativität bezüglich $(\cdot)$
8.	$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$	Distributivität
9.	$0 \neq 1$	

Zahlenmengen mit diesen Eigenschaften werden Zahlkörper genannt.

Zahlenkörper

Weitere Beispiele

Es gibt neben $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ weitere Zahlenmengen mit gleichen Eigenschaften, die oft zur einfachen Beschreibung komplexer Vorgänge verwendet werden.

(A) Der Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$ (Eigenschaft 2. gilt nicht!) wird zur Beschreibung von Raumbewegungen benutzt. Zahlen sind

$$z = a + \mathfrak{i}b + \mathfrak{j}c + \mathfrak{k}d \in \mathbb{H} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

wobei die folgenden Multiplikationsregeln für die Einheiten gelten

$$\mathfrak{i}^2 = \mathfrak{j}^2 = \mathfrak{k}^2 = -1 \text{ sowie } \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k},\ \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{i},\ \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{j}.$$

Anwendungen finden sich in der Kinematik und Robotik.

(B) Der kleinste Körper $\mathbb{F}_2$ enthält nur die Elemente 0 und 1. Hier gelten die Rechenregeln

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0,\ 0 + 1 = 1 + 0, 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \text{ sowie } 1 \cdot 1 = 1.$$

Anwendungen finden sich in der Rechentechnik und in der Quantenphysik.