Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Prof. Dr. A. Voß-Böhme, Dr. K. Fischer

Sommersemester 2021
Abgabe am 20. April 2021

Wirtschaftsmathematik II
Hausaufgabe 4

Fotografieren oder scannen Sie Ihre **handschriftlichen** (!) Lösungen (mit Angabe von Namen und Matrikelnummer) und laden Sie diese als **genau eine** PDF-Datei **bis Dienstag, 20.04.2021, 9:00 Uhr** im OPAL-Kurs unter Hausaufgaben, Hausaufgabe 4, hoch.

Der Lösungsweg muss mit Hilfe eines einfachen wissenschaftlichen Taschenrechners (nicht grafikfähig, nicht programmierbar, o.ä), ohne Benutzung der SOLVE-Funktion, nachvollziehbar sein. Fragen sind mit einem Antwortsatz zu beantworten.

Aufgabe 1: Der Stand von Frau Mathe verkauft den besten Grillkäse in der Stadt. Die täglichen Kosten (in Cent) in Abhängigkeit von der verkauften Anzahl x an Grillkäse am jeweiligen Tag lassen sich dabei wie folgt berechnen

$$K(x) = 0.0002x^3 - 0.4x^2 + 364x + 23400, \quad x \geq 0.$$

Da Frau Mathe quasi eine Monopolstellung hat, kann sie von folgender Absatz-Preis-Beziehung ausgehen:

$$x(p) = 1600 - 4 \cdot p, \quad p \geq 0,$$

wobei x der Absatz in Stück pro Tag und p der Preis pro Grillkäse in Cent ist.

(a) Geben Sie die Grenzkostenfunktion zur Kostenfunktion K an.

(b) Frau Mathe verkauft aktuell 500 Grillkäse am Tag. Weil ein Stammkunde umgezogen ist, wird Sie zukünftig 2 Grillkäse weniger verkaufen. Welchen Einfluss hat dies näherungsweise (unter Verwendung des Differentials) auf die Kosten?

(c) Geben Sie eine Funktion an, mit der Frau Mathe ihre *durchschnittlichen* täglichen Kosten in Abhängigkeit vom Absatz x berechnen kann.

(d) In der Corona-Krise überdenkt Frau Mathe Ihre Preispolitik. Zunächst sucht Sie den Absatz x_o, bei dem die durchschnittlichen Kosten minimal sind (das Betriebsoptimum).

  (i) Berechnen Sie den Wert von x_o. (*Hinweis: Die Nullstellen eines Polynoms dürfen mit Hilfe des Taschenrechners bestimmt werden.*)

  (ii) Zu welchem Preis muss Frau Mathe den Grillkäse anbieten, damit Sie den Absatz x_o erzielen kann?

  (iii) Kann Frau Mathe mit dem ermittelten Preis die Stückkosten decken?

Aufgabe 2: Ermitteln Sie für die Funktion

$$f : (-1; 1) \to \mathbb{R} : \; x \mapsto f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

die Elastizität ε_f und bestimmen Sie den Bereich (in Intervallschreibweise), in dem f unelastische ist, d.h. für den $|\varepsilon_f(x)| < 1$ gilt.

Aufgabe 1: $K(x) = 0{,}0002x^3 - 0{,}4x^2 + 364x + 23400$

(a) $K'(x) = 0{,}0006x^2 - 0{,}8x + 364$

(b) ges.: ΔK geg.: $x = 498$

Lös.: $\Delta K \approx K'(x) \cdot \Delta x$

$$\Delta K \approx K'(498) \cdot (498 - 500) = 114{,}4 \cdot (-2) = \underline{\underline{-228{,}8}}$$

Durch den Verlust des Kunden entsteht eine Kostensenkung um etwa 228,8 Cent.

(c) $DK(x) = \frac{K(x)}{x}$

$$DK(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}0002x^2 - 0{,}4x + 364 + \frac{23400}{x}$$

(d)(i) $DK'(x) = 0{,}0004x - 0{,}4 + \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 23400}{x^2}$

$$= 0{,}0004x - 0{,}4 - \frac{23400}{x^2}$$

$\Rightarrow$ Nullstellen mittels Rechner:

$x_N = 1052{,}78$

$$DK''(x) = 0{,}0004 + \frac{46800}{x^3}$$

$$DK''(x_N) = 0{,}0004 + \frac{46800}{x_N^3}$$

$$= 0{,}00044 \neq 0 \quad \checkmark$$

$\hookrightarrow x_N = x_0 = \underline{\underline{1052{,}78}}$

(ii) $x(p) = 1600 - 4 \cdot p \quad | -1600$

$x(p) - 1600 = -4p \quad | \cdot (-1)$

$-x(p) + 1600 = 4p \quad | :4$

$p = \frac{(-x_0(p) + 1600)}{4}$

$\underline{\underline{p_0 = 136{,}81 \text{ Cent}}}$

Frau Mathe muss den Grillkäse für 136,81 Cent verkaufen.

(iii) $DK(x_0) = \underline{186{,}78 \text{ Cent}}$

Die Stückkosten von 186,78 Cent würden mit dem ermittelten Preis von 136,81 Cent nicht gedeckt werden.

Aufgabe 2:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad x \to (-1;1)$$

$$f'(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$
$$= \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x$$
$$= -\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$|\varepsilon_f(x)| < 1$$
$$-\frac{x^2}{1-x^2} < 1 \quad |\cdot 1-x^2$$
$$-x^2 < 1-x^2 \quad |+x^2$$
$$0 < 1 \quad \text{u.A.}$$

$$\frac{x^2}{1-x^2} > 1 \quad |\cdot(1-x^2)$$
$$x^2 > 1-x^2 \quad |+x^2$$
$$2x^2 > 1 \quad |:2$$
$$x^2 > \frac{1}{2} \quad |\pm\sqrt{}$$
$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Der Intervall geht von $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ bis $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$I = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$