7 Torsion prismatischer Stäbe

Wirkt auf einen prismatischen Träger ein Moment um die Längsachse, so verdrehen sich die Enden des Trägers gegeneinander. Der Träger wird **tordiert**. Das Moment um die Längsachse wird als **Torsionsmoment** M_T bezeichnet. Wirkt nur Torsion auf den Träger, so wird dieser als **Torsionsstab** bezeichnet und der Belastungszustand als **reine Torsion**.

7.1 Torsion von Stäben mit kreisrundem Vollquerschnitt

Die Schubverzerrung bzw. Gleitung γ berechnet sich zu

$$\gamma(x) = \vartheta(x) \cdot r \tag{1}$$

Die Drillung ϑ beschreibt die Änderung des Winkels φ über die Längsachse x.

$$\vartheta(x) = \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

7.1.1 Materialverhalten

Das in Kapitel 6 definierte Materialgesetz gilt auch bei Torsion

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \vartheta \cdot r \tag{3}$$

mit dem Werkstoffkennwert Schubmodul G.

7.1.2 Zusammenhang Beanspruchung und Belastung

Die im Körper wirkenden Beanspruchungen entstehen infolge des äußeren Belastungszustandes. Um den Zusammenhang zwischen Schubspannungen τ und Torsionsmoment M_T herstellen zu können, wird das Momentengleichgewicht um den Mittelpunkt des Kreisquerschnitts gebildet.

Damit das Momentengleichgewicht erfüllt ist, muss das Moment aus den Schubspannungen τ gleich dem wirkenden Torsionsmoment M_T sein.

$$M_T = \int \tau(r) \cdot r \ \mathrm{d}A = \int G \cdot \vartheta \cdot r \cdot r \ \mathrm{d}A = G \cdot \vartheta \cdot \int r^2 \ \mathrm{d}A = G \cdot \vartheta \cdot I_T = \frac{\tau}{r} \cdot I_T \tag{4}$$

mit dem Torsionsträgheitsmoment I_T, das definiert wird als

$$I_T = \int r^2 \ \mathrm{d}A \tag{5}$$

Gleichung (4) lässt sich dann nach den Schubspannungen umstellen zu

$$\tau(r) = \frac{M_T}{I_T} \cdot r \tag{6}$$

Beispiel

7.1.3 Vorgehen bei statisch unbestimmten Systemen

→ Analoges Vorgehen wie in Kapitel 6

1. Freischnitt und Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen
2. Materialgesetze aufstellen
3. Verformungsbetrachtung (Kinematik)
4. Lösung des Gleichungssystems

7.2 Torsion von Stäben mit rechteckigem Vollquerschnitt

Für das Torsionswiderstandsmoment W_T gilt

$$W_T = c_2 \cdot h \cdot b^2 \tag{7}$$

und für das Torsionsträgheitsmoment

$$I_T = c_1 \cdot h \cdot b^3 \tag{8}$$

mit der Querschnittshöhe h und der Breite b. Die Konstanten c_1 und c_2 müssen Tabellenwerken (z.B. Dubbel) entnommen werden. Für die maximale Schubspannung gilt dann

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T} \tag{9}$$

und für die Verdrillung

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_T} \tag{10}$$

7.3 Torsion von Stäben mit dünnwandigem, geschlossenem Profil

7.3.1 Materialverhalten

Das in Kapitel 6 definierte Materialgesetz gilt auch bei dünnwandigen, geschlossenen Profilen

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{11}$$

mit dem Werkstoffkennwert Schubmodul G.

7.3.2 Zusammenhang Beanspruchung und Belastung

Bei dünnwandigen, geschlossenen Profilen werden die Schubspannungen über die Wanddicke t als konstant angenommen.

Die Schubspannungen berechnen sich anders als bei Vollprofilen aus

$$\tau = \frac{M_T}{2A_m \cdot t} \tag{12}$$

A_m bezeichnet dabei die Fläche, die von der Profilmittellinie eingeschlossen wird.

Soll die Drillung ϑ eines dünnwandigen, geschlossenen Profils bestimmt werden, so gilt die Beziehung

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_T} \tag{13}$$

Das Torsionsträgheitsmoment muss über das Umlaufintegral $\oint \frac{1}{t(s)}\,\mathrm{d}s$ bestimmt werden.

$$I_T = \frac{4 \cdot A_m^2}{\oint \frac{1}{t(s)}\,\mathrm{d}s} \tag{14}$$

Für Querschnitte mit konstanter Dicke $t(s) = t$ gilt vereinfacht

$$I_T = \frac{4 \cdot A_m^2 \cdot t}{U} \tag{15}$$

mit dem Profilumfang der Profilmittellinie U.