Two correlated assets (risikobehaftet)

$$r = E(R) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \qquad r_1 < r_2$$

$$\Sigma = \mathrm{Cov}(R) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(R_1) \qquad \sigma_1 \neq 0$$

$$\sigma_2^2 = \mathrm{Var}(R_2) \qquad \sigma_2 \neq 0$$

$$\rho = \mathrm{Cor}(R_1, R_2), \qquad -1 < \rho < 1$$

Zur Erinnerung:

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

Pareto-Menge ist parametrisiert durch

$$x(\mu) \begin{pmatrix} \frac{r_2 - \mu}{r_1 - r_1} \\ \frac{\mu - r_1}{r_2 - r_1} \end{pmatrix}, \left(\mu \geq \frac{b}{c}\right)$$

Varianz für gegebenes μ:

$$\sigma^2(\mu) = \theta^2 \sigma_1^2 + (1-\theta)^2 \sigma_2^2 + 2\theta(1-\theta)\sigma_1\sigma_2\rho$$

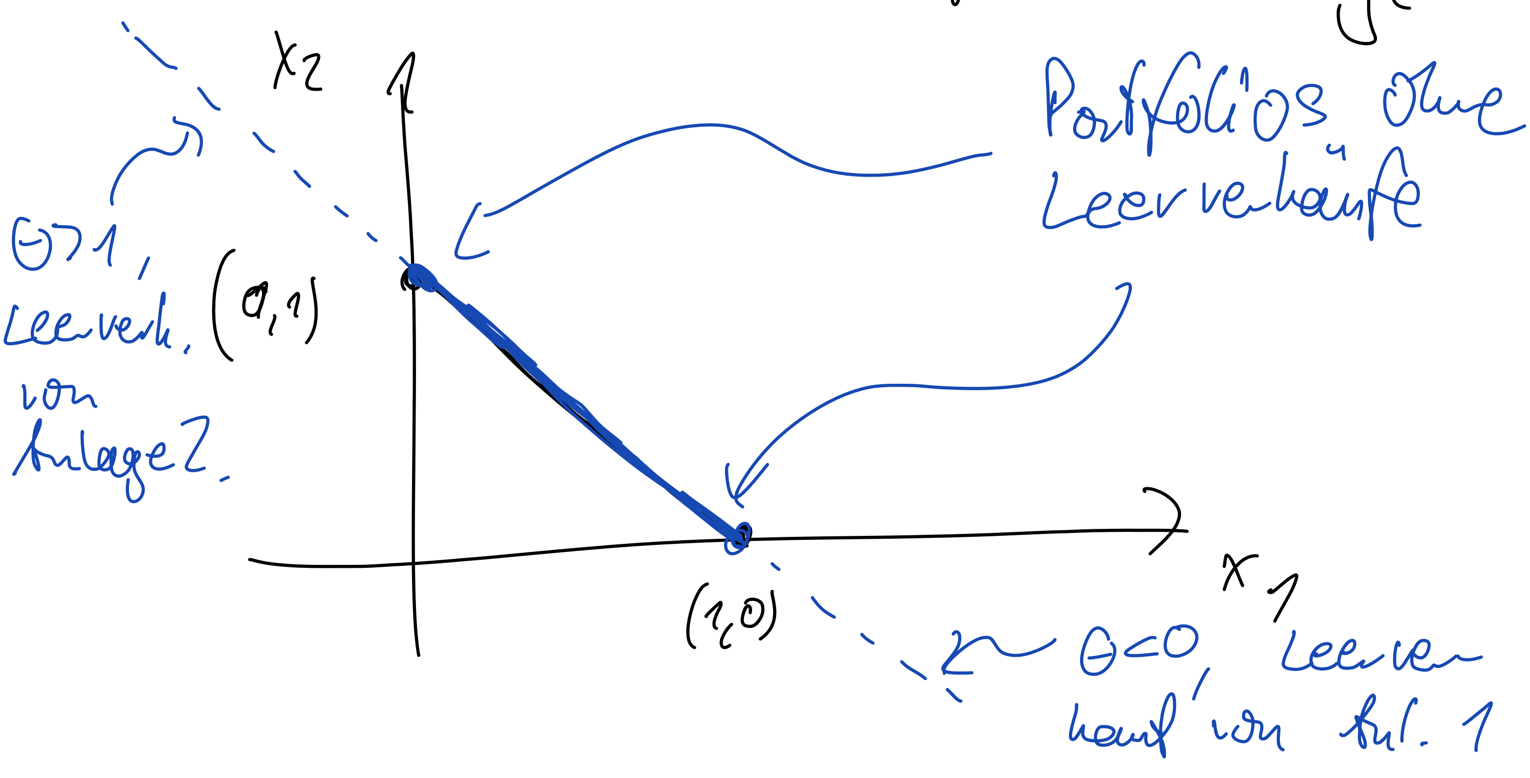
mit $\theta := \dfrac{r_2 - \mu}{r_2 - r_1}$

$\theta = 0 \leadsto$ alles in Anlage 1

$\theta = 1 \leadsto$ alles in Anlage 2

$\theta < 0 \leadsto$ Leerverkauf von Anlage 1

$\theta > 1 \leadsto$ Leerverkauf von Anlage 2



Fall 1 Kein Leerverkäufe erlaubt, also $0 \leq \theta \leq 1$

$$\sigma^2(\mu) = \theta^2 \sigma_1^2 + (1-\theta)^2 \sigma_2^2 + 2\theta(1-\theta)\sigma_1 \sigma_2 \rho$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \sigma^2(\mu) = \underbrace{2\theta}_{\geq 0} \underbrace{(1-\theta)}_{\geq 0} \underbrace{\sigma_1}_{\geq 0} \underbrace{\sigma_2}_{\geq 0} \geq 0$$

⇝ Varianz für gegeben μ steigt mit steigendem ρ!

⇝ Wenn man sich die beiden Anlagen aussuchen kann, dann sollte man Anlagen präferieren, die antikorrelieren ($\rho < 0$).

Tatsächlich:

$$\sigma^2(\mu) \xrightarrow{\varrho \to -1} \theta^2 \sigma_1^2 + (1-\theta)^2 \sigma_2^2 + 2\theta(1-\theta)\sigma_1\sigma_2(-1)$$

$$= [\ldots] = \left(\theta\sigma_1 - (1-\theta)\sigma_2\right)^2$$

Das kann $=0$ werden, falls

$$\theta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}.$$

Fall 2: Leerkäufe zugelassen, dann ist $\theta < 0$ oder $\theta > 1$ zugelassen!

Falls $\theta<0$

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}\sigma^2(\mu) = \underbrace{2\theta}_{<0}\underbrace{(1-\theta)}_{>0}\underbrace{\sigma_1}_{>0}\underbrace{\sigma_2}_{>0} < 0.$$

Falls $\theta>1$

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}\sigma^2(\mu) = \underbrace{2\theta}_{>0}\underbrace{(1-\theta)}_{<0}\underbrace{\sigma_1}_{>0}\underbrace{\sigma_2}_{>0} < 0.$$

Das Risiko ist also geringer je höher die Korrelation ist!

Ist komisch, ist aber so...

Erklärung:

Bei Leerverkauf ist entweder $x_1 < 0$ oder $x_2 < 0$. Sagen $x_1 < 0$. Was man dann bei Anlage 2 an Verlust macht wird bei hoher Korrelation in Anlage 1 wieder wettgemacht.

In der Tat

$$\sigma^2(\mu) \xrightarrow{\rho \to 1} \theta^2 \sigma_1^2 + (1-\theta)^2 \sigma_2^2 + 2\theta(1-\theta)\sigma_1\sigma_2(+1)$$

$$= (\theta\sigma_1 + (1-\theta)\sigma_2)^2,$$

das wird $=0$ für $\theta = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}$

Viele korrelierte Anlagen

Zur Vereinfachung: n Anlagen mit

$$r = E(R) = \mathbb{1} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Sigma = Cov(R) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \cdots & \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix},$$

$\sigma > 0$, $\rho \in]-1,1[$.

Wann ist Σ positiv-def. ($\rightsquigarrow$ Einschränk. an σ und ρ)? Eigenwert:

$$\lambda_1 = (1 + (n-1)\rho)\sigma^2$$

$$\lambda_2, \dots, \lambda_n = (1-\rho)\sigma^2,$$

Dafür Σ positiv definit ist, müssen alle Eigenwerte positiv sein,

$$\rightsquigarrow -\frac{1}{n-1} < \rho < 1$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2 (1-\rho)(1+(n-1)\rho)} \cdot A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1+(n-2)\rho & -\rho & \cdots & -\rho \\ -\rho & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\rho \\ -\rho & \cdots & -\rho & 1+(n-2)\rho \end{pmatrix}$$

Haben ausgearbeiteten Fall: $\mathbb{1}$ und $r = \mathbb{1}$ sind linear abhängig. Da hatten wir gesehen, dass es genau ein optimales/effizientes Portfolio gibt, nämlich

$$x_* = \frac{\Sigma^{-1} \cdot \mathbb{1}}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}}$$

$\mathbb{1}^T \Sigma \mathbb{1}$ = Summe aller Einträge von Σ^{-1}

= Summe aller Zeilensummen von Σ^{-1}

$$= \frac{1}{\sigma^2(1-\rho)(1+(n-1)\rho)} \cdot \text{Summe aller } \underbrace{\text{Zeilensummen von } A}_{1-\rho}$$

$$= \frac{n\,\cancel{(1-\rho)}}{\sigma^2\cancel{(1-\rho)}(1+(n-1)\rho)}$$

Das war das $c = \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}$

Minimale Varianz

$$= \mathrm{Var}(R^T x_*) = \frac{1}{c} = \frac{1}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}}$$

$$= [\ldots] = \underline{\underline{\frac{1+(n-1)\rho}{n} \cdot \sigma^2}}$$

Was passiert wenn die Korrelation

ρ gegen die kleinstmögliche Korrelation geht? (D.h. wenn $\rho \searrow -\frac{1}{n-1}$)

$$\frac{1+(n-1)\rho}{n} \cdot \sigma^2 \xrightarrow{\rho \searrow -\frac{1}{n-1}} \frac{1+\overbrace{\cancel{(n-1)}\left(-\cancel{\tfrac{1}{n-1}}\right)}^{-1}}{n} \cdot \sigma^2$$

$$= 0$$

Anderer Fall: Alle Anlagen sind komplett unkorreliert, d.h. $\rho = 0$

$$Var(R^T x_*) = \underline{\frac{1+\overbrace{\cancel{(n-1)\rho}}^{\to 0}}{n} \cdot \sigma^2} = \frac{1}{n}\sigma^2$$

4 Wie kommt man an die Zahlen ran?

Schätzung aus empirischen Daten

Annahmen: wir haben Tagesschlusspreise für Aktie i am Tag n: $S_i^{(n)}$

$$S_i^{(0)}, S_i^{(1)}, \ldots, S_i^{(N)}.$$

Für N Tage in der Vergangenheit kennen wir diese Daten.
Wollen Aussagen treffen über die nächsten M Tage (weil wir z.B. unser Portfolio für die nächsten Tage optimieren wollen).

$M \approx 750 - 1000$ für 3-4 Jahre

N wird ungefähr in der gleichen Größenordnung liegen.

Zukünftige Kurse

$$S_i^{(N+1)}, S_i^{(N+2)}, \ldots, S_i^{(N+M)}$$

sind unbekannt.

$$\xi_i^{(n)} := \frac{S_i^{(n)}}{S_i^{(n-1)}} \approx 1.$$

In der Börsennachrichten liest man

$$100\left(\xi_i^{(n)} - 1\right)\%$$

$\xi_i^{(n)}$ = realisierte relative Gewinn der Aktie i am Tag (n).

Für den Zeitraum $N+1, \ldots, N+M$ interessieren wir uns für

$$\hat{R}_i = \xi_i^{(N+1)} \cdot \xi_i^{(N+2)} \cdot \ldots \cdot \xi_i^{(N+M)}$$

Realisierung der Zufallsvariablen R_i.

Machen folgende Annahmen:

1.) $\xi_i^{(a)}$ ist Realisierung einer Zufallsvariablen $X_i^{(a)} : \Omega \to]0,\infty[$

2.) Für jede Anlage i sind die Zufallsvariablen
$X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, \ldots, X_i^{(N)}, X_i^{(N+1)}, \ldots, X_i^{(N+M)}$
identisch verteilt, d.h. es gibt eine ZV $\tilde{X}_i : \Omega \to]0,\infty[$
s.d. $X_i^{(a)} \sim \tilde{X}_i$.
"Die Zukunft sieht in etwa so aus wie die Vergangenheit."

3.) Zufällige relative Gewinne an verschiedenen Tagen sind unabhängig voneinander, d.h.,

$X_i^{(n)}$, $X_j^{(m)}$ unabh. für $m \neq n$ und beliebige i und j.

(Das ist leider eine sehr, sehr starke Annahme! Die brauchen wir zum rechnen.)

Die Zufallsvariablen für unser Portfoliooptimierungsproblem sind

R_i = relativer Gewinn im Zeitraum von Tag $N+1$ bis Tag $N+M$

$$= X_i^{(N+1)} \cdot \ldots \cdot X_i^{(N+M)}$$

Was wir schätzen wollen sind

$E(R_i) = r_i$ und $Cov(R_i, R_j) = \Sigma_{ij}$

Wenn man zwei ~~unabh.~~ ZV U und V hat, dann gilt:

$$\mathrm{Cov}(U,V) = E\big((U-E(U))(V-E(V))\big)$$
$$= E(U \cdot V) - E(U)\cdot E(V).$$

D.h. wenn U und V unabh. sind gilt:

$$0 = E(U\cdot V) - E(U)\cdot E(V)$$

$$\leadsto \quad E(U\cdot V) = E(U)\cdot E(V).$$

$$\leadsto E(R_i) = E\left(X_i^{(N+1)} \cdot X_i^{(N+2)} \cdot \ldots \cdot X_i^{(N+M)}\right)$$

<u>Anm. 3.</u>
$$= E\left(X_i^{(N+1)}\right) \cdot E\left(X_i^{(N+2)} \cdot \ldots \cdot X_i^{(N+M)}\right)$$
$$= E\left(X_i^{(N+1)}\right) \cdot \ldots \cdot E\left(X_i^{(N+M)}\right)$$

<u>Anm 2</u>
$$= E(\tilde{X}_i) \cdot \ldots \cdot E(\tilde{X}_i)$$
$$= \left(E(\tilde{X}_i)\right)^M$$

$E(\tilde{X}_i)$ könnte man ja aus der Vergangenheit $\xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(N)}$ schätzen!

$$E(\tilde{X}_i) \approx \bar{\xi}_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \xi_i^{(n)}$$

Jetzt könnte man auf die Idee kommen, dass folgendes ein guter Schätzer wäre für $E(R_i) = E(\tilde{X}_i)^M$:

$$E(R_i) \approx \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \xi_i^{(n)} \right)^M .$$

Das ist aber ein ganz schlechter Schätzer!

Typischerweise gilt für absoluten Fehler:

$$\left| E(\tilde{X}_i) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \xi_i^{(n)} \right| \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Relativer Fehler:

$$\frac{|E(\tilde{x}_i) - \bar{\xi}_i|}{|E(\tilde{x}_i)|} =: \varepsilon \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Angenommen, wir <u>überschätzen</u> $E(\tilde{x}_i)$

$$\bar{\xi}_i = \underbrace{(1+\varepsilon)}_{>1} E(\tilde{x}_i)$$

rel. Fehler $\left(\bar{\xi}_i^{\,M} \text{ für } E(R_i) \right)$

$$= \frac{|\bar{\xi}_i^{\,M} - E(R_i)|}{|E(R_i)|}$$

$$= \frac{|(1+\varepsilon)^M \cancel{E(\tilde{x}_i)^M} - \cancel{E(\tilde{x}_i)^M}|}{|\cancel{E(\tilde{x}_i)^M}|}$$

$$= \frac{(1+\varepsilon)^M - 1}{1} = (1+\varepsilon)^M - 1.$$

Falls $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{N}}$,

rel. Fehler unseres Schätzer

$$= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}}\right)^M = \left(1 + \frac{\sqrt{N}}{N}\right)^M - 1$$

Angenommen M und N sind in etwa gleich groß, sagen

$N = C \cdot M$, mit $C > 0$.

$C \approx 1$.

$$\left(1 + \frac{\sqrt{N}}{N}\right)^M = \left(1 + \frac{\sqrt{CM}}{C \cdot M}\right)^M$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{M/C}}{M}\right)^M .$$

Analysis 1 / Mathe 1 für Wiwi.

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^t$$

$$\left(1+\frac{\sqrt{n/C}}{n}\right)^n \sim e^{\sqrt{n/C}}$$

(Das kann man math. rigoros zeigen!)

konkretes Beispiel: $n = 250$
≈ 1 Jahr.

und $C = 5$.

relativer Fehler: $\left(1+\frac{1}{\sqrt{5\cdot 250}}\right)^{250} - 1$

$\approx 1066{,}33$.

Selbst wenn der relative Fehler

$|E(\tilde{X}_1) - \bar{\xi}_1| \sim \frac{1}{N}$ wäre, dann

hätte noch immer sowas wie $e^{1/c}$
heraus! Also möglicherweise mehr
als 100 %