

- Name: Luca Etienne Schulz
- Matrikel-Nr.: 5165836
- Datum: 15.10.2023

N1.2 Hausaufgabe (Nachbereitung)

(a) Bestimmen Sie $z := (1 + i)^6$ in Eulerscher Darstellung auf 2 Arten:

Berechnen Sie zuerst z in arithmetischer Darstellung und rechnen Sie dann in Polarkoordinaten um.

$$z := (1 + i)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \cdot 1^{(6-k)} \cdot i^k$$

$$\binom{6}{0} \cdot 1^6 \cdot i^0 = 1$$

$$\binom{6}{1} \cdot 1^5 \cdot i^1 = 6i$$

$$\binom{6}{2} \cdot 1^4 \cdot i^2 = -15$$

$$\binom{6}{3} \cdot 1^3 \cdot i^3 = -20i$$

$$\binom{6}{4} \cdot 1^2 \cdot i^4 = 15$$

$$\binom{6}{5} \cdot 1^1 \cdot i^5 = 6i$$

$$\binom{6}{6} \cdot 1^0 \cdot i^6 = -1$$

$$z = 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1 = -8i$$

Kartesische Koordinaten: (0, -8)

Um nun die Polarform zu berechnen, brauchen wir den Radius r und den Winkel φ ("phi").

$$r = \sqrt{(0^2) + (-8^2)} = 8$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-8}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Polarkoordinaten:

$$8 \cdot (\cos(-\pi/2) + i \cdot \sin(-\pi/2))$$

Bestimmen Sie zuerst die Eulersche Darstellung von $(1 + i)$ und berechnen Sie dann die 6. Potenz.

- $r = \sqrt{2}$
- $\varphi = \arctan(1/1) = \frac{\pi}{4}$

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$$

Die 6. Potenz von $\sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$ ist, wie oben beschrieben: -8 , denn unser Ergebnis ist gleich $1 + i$, welches wir bereits evaluiert haben.

(b) Berechnen Sie $y := \overline{(1 + i)}^{-1}$.

r und φ für $1 + i$ in Polarform:

- $r = \sqrt{2}$
- $\varphi = \arctan(\frac{1}{1}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Kehrwert des Betrags (r^{-1}) und negativer Winkel (φ) finden:

- $r^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $-\varphi = -\frac{\pi}{4}$

$$(1 + i)^{-1} = (\sqrt{2}/2) (\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))$$

Werte von $\cos(\frac{-\pi}{4})$ und $\sin(\frac{-\pi}{4})$ berechnen:

- $\cos(\frac{-\pi}{4}) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin(\frac{-\pi}{4}) = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$

Einsetzen:

$$(1 + i)^{-1} = (\sqrt{2}/2) * (\sqrt{2}/2 - (\sqrt{2}/2)i)$$

Und multiplizieren:

$$\begin{aligned} (1 + i)^{-1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) \\ &= \frac{2}{4} - \frac{2}{4i} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2i} \end{aligned}$$

(c) Beweisen Sie, dass für alle komplexen Zahlen x die Gleichung $\overline{x^{-1}} = \overline{x}^{-1}$ gilt.

***Hinweis:** Es gibt (mindestens) 2 Beweismöglichkeiten!*

Ich definiere der Übersicht wegen $y := x^{-1}$

Beweis via Konjugation:

- $\bar{y} = \overline{x^{-1}}$
 - $= \bar{x} \cdot \overline{x^{-1}}$
 - $= \bar{x} \cdot (\bar{x}^{-1})$
 - $= \bar{x} \cdot x$
 - $= x$
- $$y = (\bar{x}^{-1}) = x^{-1}$$

W.z.b.w..