

---

## Mathematik 1 - WS2022/23 Übungsblatt 1

---

**Aufgaben mit Lösungshilfe.** Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

**Aufgabe 1:** Zeigen Sie (z. B. unter Verwendung der binomischen Formeln), dass folgende Behauptungen wahr sind.

- (a) Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 2$ ) ist wieder gerade.
- (b) Ist  $n \in \mathbb{N}$  eine ungerade natürliche Zahl, so ist  $n^2$  wieder ungerade.
- (c) Für jede ungerade Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ist  $n^3$  eine ungerade natürliche Zahl.

**Aufgabe 2:** Gegeben sind jeweils zwei Aussagen  $a$  und  $b$  für eine reelle Zahl  $x$ . Gilt dann  $a \Rightarrow b$ ,  $b \Rightarrow a$  oder sogar  $a \Leftrightarrow b$ ?

	(a)	(b)	(c)	(d)
$a :$	$x^2 = 4$	$x^2 + x = 0$	$2(x - 1)(x - 2) = 0$	$x > 2$
$b :$	$ x  = 2$	$x + 1 = 0$	$x = 1 \vee x = 2$	$x^2 > 4$

**Aufgabe 3:** Gegeben sind die folgenden Implikationen  $p \Rightarrow q$

- (a)  $\forall u, v \in \mathbb{R}$  gilt:  $u = v \Rightarrow u^2 = v^2$
- (b)  $\forall m, n \in \mathbb{N}$  gilt:  $m \cdot n$  ungerade  $\Rightarrow m$  ungerade.

Bilden Sie jeweils den *logischen Umkehrschluss*  $\neg q \Rightarrow \neg p$  und überprüfen Sie die Wahrheitswerte.

**Aufgabe 4:** Weisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen die Äquivalenz der folgenden Aussageverbindungen nach.

Es seien  $p$  und  $q$  zwei Aussagen. Dann gelten:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \tag{1}$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \tag{2}$$

(Regeln von De Morgan).

**Aufgabe 5:** Zeigen Sie unter Verwendung Logischer Gesetze, dass die folgenden Aussageverbindungen stets wahr sind, also Tautologien darstellen:

- (a)  $(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b$  (*direkter Beweis*),
- (b)  $(a \wedge (\neg b \Rightarrow \neg a)) \Rightarrow b$  (*indirekter Beweis*).

*Hinweis:* Drücken Sie zunächst die Implikation mit Negation und Disjunktion aus.

**Selbständige Bearbeitung.** Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

**Aufgabe 6:** Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

- $a$  : $\Leftrightarrow$  Es existiert eine reelle Zahl  $x$ , für die gilt:  $x + 1 = x$ .  
 $b$  : $\Leftrightarrow$  Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}$  gilt  $x(x + y)^3 = x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3$ .  
 $c$  : $\Leftrightarrow$  Es existiert ein  $x \in \mathbb{N}$  mit  $(x - 1)^2 = x^2 - 3x$ .

Bilden Sie ebenfalls die Negation dieser Aussagen.

**Aufgabe 7:** Stellen Sie Wahrheitstabellen für folgende Aussageverbindungen auf:

- (a) sowohl A als auch B,                      (c) entweder A oder B,                      (e) zwar A, jedoch nicht B.  
 (b) weder A noch B,                      (d) nicht A, aber B,

**Aufgabe 8:** Welche der Relationen  $\Rightarrow$ ,  $\Leftarrow$  oder  $\Leftrightarrow$  sind zwischen den folgenden Aussagen erfüllt?

Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Aussage 1	$x = 3$	$x^2 - 16 = 0$	$x = \sqrt{4}$	$x(x + 1) = 0$	$(z - 4)(z - 5) = 0$
Aussage 2	$x^2 = 9$	$x = 4$	$x^2 = 4$	$x + 1 = 0$	$z = 4 \vee z = 5$

Aufgabe	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)
Aussage 1	$p = 1$	$x^2 < 16$	$x^2 < 16$	$k^2 > 4$	$k^2 > 4$	$x < 3$
Aussage 2	$p \geq 1$	$x < 4$	$x < 4 \wedge x > -4$	$k > 2$	$k > 2 \vee k < -2$	$x^2 < 9$

**Aufgabe 9:** Es seien die folgenden Wahrheitstafel für die Aussagen  $a$  und  $b$  gegeben:

(a)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th><math>a</math></th><th><math>b</math></th><th>?</th></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	$a$	$b$	?	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
$a$	$b$	?														
0	0	1														
0	1	0														
1	0	0														
1	1	1														

(b)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th><math>a</math></th><th><math>b</math></th><th>?</th></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	$a$	$b$	?	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
$a$	$b$	?														
0	0	0														
0	1	1														
1	0	1														
1	1	0														

Wie lauten die Aussagenverknüpfungen, die an der Stelle von „?“ stehen müssten? Verwenden Sie für die Verknüpfungen  $\wedge$ ,  $\vee$  und  $\neg$ .

Hinweis: Um „?“ nur unter Verwendung von  $\wedge$ ,  $\vee$  und  $\neg$  zu schreiben, betrachtet man die Zeilen, bei denen die Aussagenverknüpfung „?“ den Wahrheitswert 1 hat (1-Zeilen). Steht in dieser Zeile bei  $a$  eine 1, so wird  $a$ , andernfalls  $\neg a$  übernommen. Entsprechend wird mit  $b$  verfahren. Diese beiden Ausdrücke werden nun mit  $\wedge$  verbunden. Alle daraus resultierenden Ausdrücke aus den 1-Zeilen werden abschließend mit  $\vee$  verbunden.

**Aufgabe 10:** Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass es sich bei der nachstehenden logischen Verknüpfung um eine Tautologie handelt.

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad (3)$$