Luca Etienne Schulz
Matrikelnummer 516586
luca_etienne.schulz@mailbox.tu-dresden.de

1. Übungsblatt für die Übungen vom 21.10.2024 - 27.10.2024

Mengenlehre, Quantoren

N1 Hausaufgabe (Nachbereitung)

Beweisen Sie, dass fur beliebige Teilmengen A, B und C einer Menge U gilt:

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$$

Die blaue und orange Farbe ist nur zur besseren Orientierung da.

1. $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

$$\begin{aligned} \text{Sei } x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) &\Rightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \\ &\underline{\Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C)} \end{aligned}$$

2. $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$$\begin{aligned} \text{Sei } x \in A \setminus (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\ &\Rightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \\ &\underline{\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap A \setminus C} \end{aligned}$$

Da beide Mengen ineinander enthalten sind, gilt $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$. ■

Auf einem Stück Papier lässt sich das auch super mit einem Venn-Diagramm beweisen.

—

Gegeben sind die Mengen $A_m = \{n \in \mathbb{N} \mid m < n \leq 4m\}$ für $m = 0, 1, 2, \ldots$ Geben Sie die Mengen A_0, A_1 und A_2, sowie die Potenzmengen $\mathcal{P}(A_0)$ und $\mathcal{P}(A_1)$ als Mengen konkreter Elemente an. Bestimmen Sie die Mächtigkeit $|\mathcal{P}(A_m)|$ fur beliebiges $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A_0 &= \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \leq 4 \cdot 0\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \leq 0\} = \emptyset \\ A_1 &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 4 \cdot 1\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 4\} = \{2, 3, 4\} \\ A_2 &= \{n \in \mathbb{N} \mid 2 < n \leq 4 \cdot 2\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 < n \leq 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A_0) &= \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \\ \mathcal{P}(A_1) &= \mathcal{P}(\{2, 3, 4\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\} \end{aligned}$$

Mächtigkeit $\mathcal{P}(A_m)$: betrachten der Anzahl der Element in A_m.

Für $m = 0$ ist A_0 die leere Menge $\emptyset$.

Für $m > 0$ enthält A_m alle natürlichen Zahlen von $m + 1$ bis $4m$, also $4m - (m + 1) + 1 = 3m$ Elemente.

Die Potenzmenge einer Menge mit k Elementen hat 2^k Elemente. Daher gilt:

- $|\mathcal{P}(A_0)| = 2^0 = 1$
- Für $m > 0 : |\mathcal{P}(A_m)| = 2^{3m}$