Schulz, Luca Etienne 30.11.2021

10.) Def. Abbildung + 11.) Urbild und Bild

Eine in $D \times Z$ definierte 2-stellige Relation f heißt Abbildung (Funktion) von D nach Z, wenn jedes $x \in D$ mit genau einem $y \in Z$ in Relation steht, d.h.

$$\forall x \in D: \exists! y \in Z \text{ mit } xfy.$$

Für Abbildungen verwendet man statt der Infix-Schreibweise die Notation $y = f(x)$, $x \to y$ oder $x \xrightarrow{f} y$.

Das zu x eindeutige $y \in Z$ heißt Bild von x unter f oder der Funktionswert von x unter f.
Für dieses y heißt x ein Urbild von y unter f.

Man nennt die Menge D die Definitionsmenge oder den Definitionsbereich.
Die Menge Z heißt Zielmenge oder Zielbereich.
Der Graph der Abbildung (der Funktionsgraph) ist die Teilmenge $f \subseteq D \times B$ und wird mit $\text{graph}(f)$ bezeichnet, also

$$\text{graph} := \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

in der Abbildungsnotation.
Man schreibt für eine Abbildung $f: D \to Z$.

Definition surjektive Abbildung

Eine Abbildung $f: D \to Z$ heißt surjektiv, falls

$$Im(f) = Z$$

gilt (bzw. $f(D) = Z$), d.h. falls jedes $y \in Z$ mind. ein Urbild $x \in D$ besitzt. Ist $f: D \to Z$ surjektiv, sagt man f ist eine Abbildung von D auf Z.

Definition injektive Abbildung

Eine Abbildung heißt injektiv, wenn

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

d.h. wenn verschiedene $x_1, x_2 \in D$ stets verschiedene Bilder $f(x_1), f(x_2) \in Z$ haben. Anders ausgedrückt darf jedes y höchstens ein Urbild haben.

Bemerkung: Injektivität kann man auch durch die Kontraposition definieren, d.h. eine Abbildung $f: D \to Z$ heißt injektive genau dann wenn

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

A. Schulz !! 30.11.21