TU Bergakademie Freiberg — Freiberg, 29. November 2024
Dr. M. Winkler — Abgabe am 13. Dezember 2024

Optimierung für Mathematiker/innen

Übung 8

Aufgabe 31: Duales LP für verschiedene Beispiele

(a) Zeige, dass sich das duale vom dualen eines LP in Normalform wieder als das primale Problem auffassen lässt.

(b) Zeige, dass sich die rechten linearen Programme jeweils als das duale der linken linearen Programme auffassen lassen.

(a)

$$\begin{array}{lll} \max & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \min & b^\top \lambda \\ \text{sodass} & A^\top \lambda \geq c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{lll} \min & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax \geq b \\ & x \text{ frei} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \max & b^\top \lambda \\ \text{sodass} & A^\top \lambda = c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{lll} \max & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax = b \\ & \ell \leq x \leq u \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \min & (A\ell - b)^\top \lambda_1 + (u-\ell)^\top \lambda_2 + c^\top \ell \\ \text{sodass} & A^\top \lambda_1 - \lambda_2 \leq -c \\ & \lambda_1 \text{ frei},\ \lambda_2 \geq 0 \end{array}$$

Hinweis: Überführe zunächst in Normalform.

Aufgabe 32: Beispiele für LPs mit (un-)zulässigen und (un-)beschränkten primalen/dualen Problemen

(a) Gib ein lineares Programm an, bei dem sowohl das primale als auch das duale Problem unzulässig ist (vgl. Satz 8.7, Fall (II)).

(b) Gib ein lineares Programm an, bei dem das primale zulässig und unbeschränkt ist und das zugehörige duale Problem unzulässig ist (vgl. Satz 8.7, Fall (III)).

Aufgabe 33: Transportproblem, kostenminimaler Fluss

Gegen die zunehmende Trinkwasserknappheit in einem Land sollen in Zukunft mehrere Dörfer in einer bestimmten Region mit frischem Trinkwasser versorgt werden. Dazu stehen zwei Wasseraufbereitungsanlagen in der Region zur Verfügung, von denen aus Wassertransporte zu vier Sammelknoten geschickt werden. Gesucht ist ein kostenminimaler Transportplan für die Wasserversorgung über ein gegebenes Straßennetz, das als Graph modelliert wird (Abbildung 1). Da viele Straßen nur schlecht befestigt sind und ein zu häufiger Verkehr von schweren Transporten die Straßen zu stark beschädigen würden, wurde vereinbart, dass dort nur eine bestimmte Anzahl an Transporten pro Monat verkehren darf.

(a) Formulieren Sie die Aufgabe als mathematische Optimierungsaufgabe.

(b) Lösen Sie die Aufgabe in MATLAB mit Hilfe von `linprog`. Informationen über das Straßennetz können in der Datei `Daten_Wassertransport.m` auf der Homepage gefunden werden. Stellen Sie die Lösung mit Hilfe von `graphviz` dar.

(c) Auf einer Straße kommt es zu schweren Schäden, sodass die maximale Anzahl der Transporter heruntergesetzt werden muss. Wie ändert sich die Lösung, wenn das Transportlimit von Kante $(13, 5)$ auf 100 verringert wird? Was würde passieren, wenn diese Straße komplett ausfällt?

(d) Wieso wird die Optimierungsaufgabe unlösbar, wenn die Wasseraufbereitungsanlage 1 ihre Produktion um 100 steigert? Wie kann die Optimierungsaufgabe modifiziert werden, damit sie wieder lösbar wird?

Hausaufgabe 17: Implementierung von Phase I

Implementiere „Phase I“ für ein lineares Programm in Normalform in `Matlab`. Erstelle dazu eine Datei `simplex_phaseI.m` und verwende

```
function [x,basis] = simplex_phaseI(A,b,c,pricing)
```

als erste Zeile. Dabei sind `A,b,c` die Daten des linearen Programms

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

und `pricing` gibt die Auswahlstrategie an. Rückgabewerte sind ein für Phase II zulässiger Basisvektor `x` und die zugehörige Basis `basis`. Auch der Fall, dass kein zulässiger Punkt existiert, ist abzufangen. Auch der Fall $b \ngeq 0$ soll zugelassen sein. Dies ist innerhalb der Funktion zu behandeln. Die in Übung 7, Hausaufgabe 16 implementierte Routine für das Simplex-Verfahren soll natürlich wiederverwendet werden.

Teste den Algorithmus an dem in Übung 7, Aufgabe 29 angegebenen Beispiel.

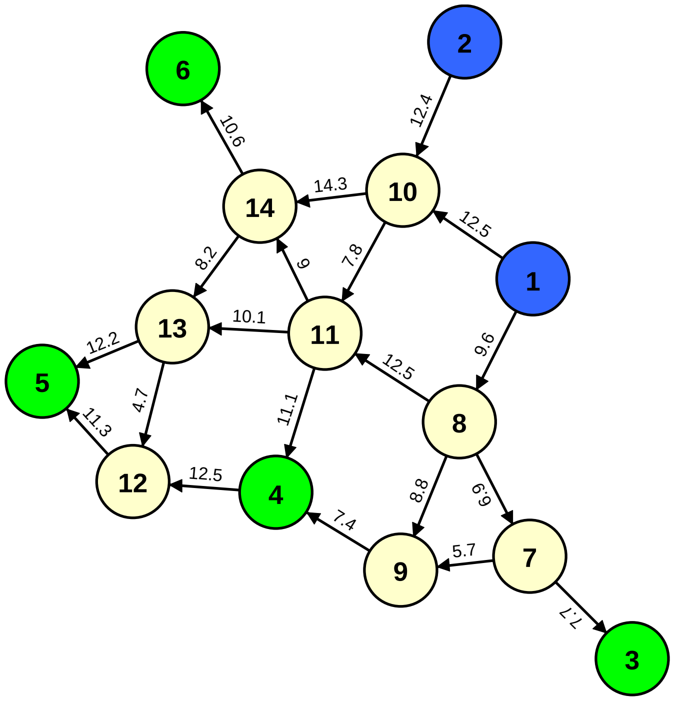

Abbildung 1: Graph des Straßennetzes mit den Kosten der einzelnen Straßen. Die Transporte sollen von den Wasseraufbereitungsanlagen 1 und 2 zu den Sammelpunkten 3, 4, 5 und 6 fahren.

Hinweis: Verwende zur Lösung des Hilfsproblems die Implementierung des Simplex-Algorithmus aus Aufgabe Übung 7, Hausaufgabe 16. Falls diese Aufgabe nicht gelöst wurde kann auch die MATLAB-Funktion `linprog` verwendet werden.

Abgabe: Schicke die erzeugten `m`-Files `simplex_phaseI.m` und `test_phaseI.m` an `max.winkler@math.tu-freiberg.de` (Betreff: HA Optimierung für Mathematiker/innen Übung 8).

Hausaufgabe 18: Würfel von Klee-Minty

Wir betrachten das lineare Problem

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
\max & \multicolumn{10}{l}{2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n} \\
\text{sodass} & x_1 & & & & & & & & \leq & 5 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & & & & & & \leq & 25 \\
 & 8x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & & \leq & 125 \\
 & \vdots & & & & & & & & & \vdots \\
 & 2^n x_1 & + & 2^{n-1}x_2 & + & \ldots & + & 4x_{n-1} & + \; x_n & \leq & 5^n \\
\text{und} & \multicolumn{10}{l}{x \geq 0.}
\end{array}
$$

Löse das Problem für verschiedene n mit dem Simplex-Algorithmus in MATLAB. Verwende dabei die Indizes der eingeführten Schlupfvariablen als Startbasis und *negativste reduzierte Kosten* als Auswahlstrategie. Wie hängen die vom Simplex-Algorithmus benötigten Iterationen mit n zusammen? Plotte die benötigten Iterationen gegen n.

Hinweis: Verwende zur Lösung des Hilfsproblems die Implementierung des Simplex-Algorithmus aus Aufgabe Übung 7, Hausaufgabe 16. Falls diese Aufgabe nicht gelöst wurde kann auch die MATLAB-Funktion `linprog` verwendet werden. Diese Funktionen verwenden allerdings ein primal-duales Simplex-Verfahren, welches bei diesem Problem deutlich weniger Iterationen benötigt um eine Lösung zu finden.

Abgabe: Schicke das erzeugte `m`-File `klee_minty.m` an `max.winkler@math.tu-freiberg.de` (Betreff: HA Optimierung für Mathematiker/innen Übung 8).

Hausaufgabe 19: Selbstduale LPs

Wir betrachten das lineare Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{sodass} \quad & Ax \leq b \\ \text{und} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass das Problem selbstdual ist, falls $A = -A^\top$ und $b = c$ gilt.

(b) Zeige, dass der Optimalwert eines solchen LPs Null ist, falls das Problem überhaupt einen zulässigen Punkt besitzt.