Satz 10.1 (Ergänzungen)

(c) **Leibnizsches Konvergenzkriterium**: Eine alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \dots$$

ist konvergent, wenn für die Reihenglieder gilt:

1. $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ bildet eine monoton fallende Zahlenfolge, d. h.

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_k > a_{k+1} > \dots \quad \text{mit} \quad a_k > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*$$

2. Für den Grenzwert gilt: $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

Satz 10.1 (Ergänzungen)

(d) **Cauchysches Verdichtungskriterium**: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Zahlenfolge. Dann hat die unendliche Reihe

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

das gleiche Konvergenzverhalten wie die verdichtete Reihe

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{(2^n)} = a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8 + \dots$$

das heißt, dass die eine Reihe genau dann konvergiert, wenn die andere konvergiert.

Satz 10.1 (Ergänzungen)

(e) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe mit positiven Gliedern.

Majorantenkriterium: Die Reihe *konvergiert*, wenn eine Vergleichsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existiert mit:

1. Die Vergleichsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.
2. Zwischen den Gliedern beider Reihen besteht die Relation

$$a_n \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$

Minorantenkriterium: Die Reihe *divergiert*, wenn eine Vergleichsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existiert mit:

1. Die Vergleichsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist divergent.
2. Zwischen den Gliedern beider Reihen besteht die Relation

$$a_n \geq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$

Satz 10.1 (Ergänzungen)

(f) **Wurzelkriterium**: Sei eine unendliche Reihe

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

mit reellen Summanden a_n gegeben. Falls der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

existiert, so ist die Reihe S absolut konvergent.[1]

Existiert dieser Grenzwert und ist dieser größer Eins, so ist S divergent, für 'gleich Eins' ist keine Entscheidung mit diesem Kriterium möglich.

---

[1] D. h. die Reihe S selbst und auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergieren.