

Luca Etienne Schulz
Matrikelnummer 5165836
luca_etienne.schulz@mailbox.tu-dresden.de

1. Übungsblatt für die Übungen vom 21.10.2024 - 25.10.2024

Komplexe Zahlen

N1.2 Hausaufgabe (Nachbereitung)

Man könnte auch bspw. $x : x = 2n \mid n \in \mathbb{N}$ schreiben, um bspw. eine gerade Zahl zu beschreiben. Hier habe ich mit dem Modulo Operator gerechnet:

$$x := (-1)^{m_6} + (-1)^{m_7} \cdot i \begin{cases} 1 + i & | m_6 \bmod 2 = 0 \wedge m_7 \bmod 2 = 0 \\ 1 - i & | m_6 \bmod 2 = 0 \wedge m_7 \bmod 2 = 1 \\ -1 + i & | m_6 \bmod 2 = 1 \wedge m_7 \bmod 2 = 0 \\ -1 - i & | m_6 \bmod 2 = 1 \wedge m_7 \bmod 2 = 1 \end{cases}$$

Da meine Matrikelnummer die 5165836 ist, ist x :

$$m_1 = 5, m_2 = 1, m_3 = 6, m_4 = 5, m_5 = 8, m_6 = 3, m_7 = 6,$$

$$x := (-1)^3 + (-1)^6 = -1 + i$$

Bestimmen Sie $z := x^{m_5+5}$ in Eulerscher Darstellung auf 2 Arten:

Berechnen Sie zuerst z in arithmetischer Darstellung und rechnen Sie dann in Polarkoordinaten um.

$$z = (-1 + i)^{8+5} = (-1 + i)^{13} = -64 + 64i$$

Umrechnung in Polarkoordinaten:

$$|z| = \sqrt{(-64)^2 + 64^2}$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{64}{-64}\right) = \frac{-\pi}{4}$$

Eulersche Darstellung:

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \arg(z)} = 64\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

Bestimmen Sie zuerst die Eulersche Darstellung von x und berechnen Sie dann die $(m_5 + 5)$ -te Potenz.

$$|x| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(x) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Somit ist die Eulersche Darstellung von x :

$$x = |x| \cdot e^{i \cdot \arg(x)} = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

Berechnung der $(m_5 + 5)$ -ten Potenz mit $(m_5 + 5) = 13$:

$$\left(\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right)^{13}$$

$$z = 64\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

Berechnen Sie $y := (m_1 + m_4) + (m_2 + m_5)i$. **Bestimmen Sie** $-(y)^{-1}$

$$\begin{aligned} y &= (5 + 5) + (1 + 8)i \\ &= 10 + 9i \end{aligned}$$

“y-quer” wird gebildet, indem man das Vorzeichen des Imaginärteils “umdreht”:

$$-(y) = 10 - 9i$$

$$\begin{aligned} -(y)^{-1} &= \frac{1}{10 - 9i} \\ &= \frac{1}{10 - 9i} \cdot \frac{10 + 9i}{10 + 9i} \\ &= \frac{10 + 9i}{(10 - 9i)(10 + 9i)} \\ &= \frac{10 + 9i}{100 + 81} \\ &= \frac{10}{181} + \frac{9}{181}i \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $x \neq 0$ die Gleichung $-(x)^{-1} = -(x^{-1})$ gilt.

Ich definiere der Übersicht wegen $y := x^{-1}$.

Beweis via Konjugation:

Sei $x = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}$. Konjugiert x ist dann $-(x) = a - bi$.

Der Kehrwert von x ist $x^{-1} = \frac{1}{x}$:

$$x^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1 - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Dem komplexen Teil der Zahl wird das Vorzeichen “umgedreht”:

$$-(x^{-1}) = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Und wenn man den Kehrwert von $-(x)$ berechnet, stellt man fest, dass diese Werte gleich sind:

$$-(x)^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{a - bi} = \frac{1 + bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Die blau hervorgehobenen Gleichungen zeigen, dass $-(x^{-1}) = -(x)^{-1}$.

q.e.d.