

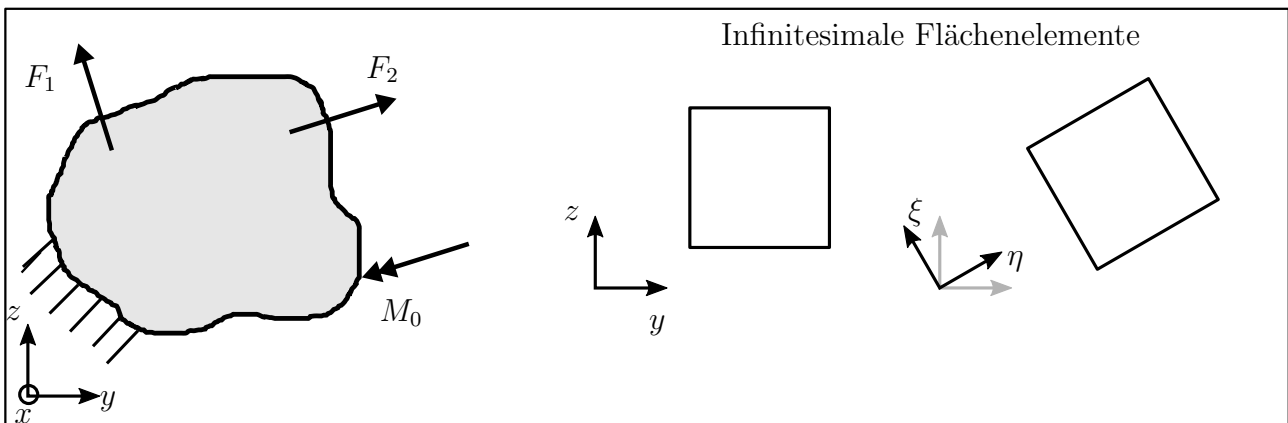
## 9 Festigkeitshypothesen

### 9.1 Rückblick und Problemstellung

Bereits in Kapitel 6 wurden einachsige und mehrachsige Spannungszustände diskutiert. Reale Bauteile werden im Betrieb oft durch eine Kombination aus eingepprägten Lasten, z.B. Biegung und Torsion, beansprucht, weshalb im Inneren der Struktur hauptsächlich mehrachsige Spannungszustände entstehen. Soll ein Bauteil nun gegen Versagen ausgelegt werden, so steht der Ingenieur vor einem Problem, wenn aus dem Zugversuch nur die zulässige Spannung  $\sigma_{zul}$  bekannt ist. Denn mit welcher der auftretenden Spannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  im Bauteilinneren soll er die zulässige Spannung  $\sigma_{zul}$  vergleichen?

#### 9.1.1 Einachsige und mehrachsige Spannungszustände

Wird eine Struktur durch eingepprägte Lasten belastet, so entstehen in deren Inneren Spannungen. Wird ein infinitesimales Stück aus der Struktur herausgeschnitten, so ist der Spannungszustand abhängig vom Ort und dem gewählten Schnittwinkel.



In einem x-y-z-Koordinatensystem kann der Spannungszustand beschrieben werden durch den **Spannungstensor**, dessen Komponenten dargestellt werden können als

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Wird der Schnitt so gesetzt, dass keine Schubspannungen entstehen, wird von einem **Hauptspannungszustand** gesprochen.

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_j & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (2)$$

### 9.1.2 Ebene Spannungszustände

Bei ebenen Spannungszuständen sind die Spannungen in einer der drei Koordinatenrichtungen Null, d.h. es ist stets eine der 3 Hauptspannungen  $\sigma_k = 0$ . Die beiden anderen Hauptspannungen können über die Formel

$$\sigma_{i,j} = \frac{\sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} \quad (3)$$

bestimmt werden (Spannungen in x-Richtung sind Null, d.h.  $\sigma_{xx} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ ). Die Hauptspannungen  $\sigma_i$ ,  $\sigma_j$  und  $\sigma_k$  sind dabei der Größe nach zu ordnen, so dass gilt

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (4)$$

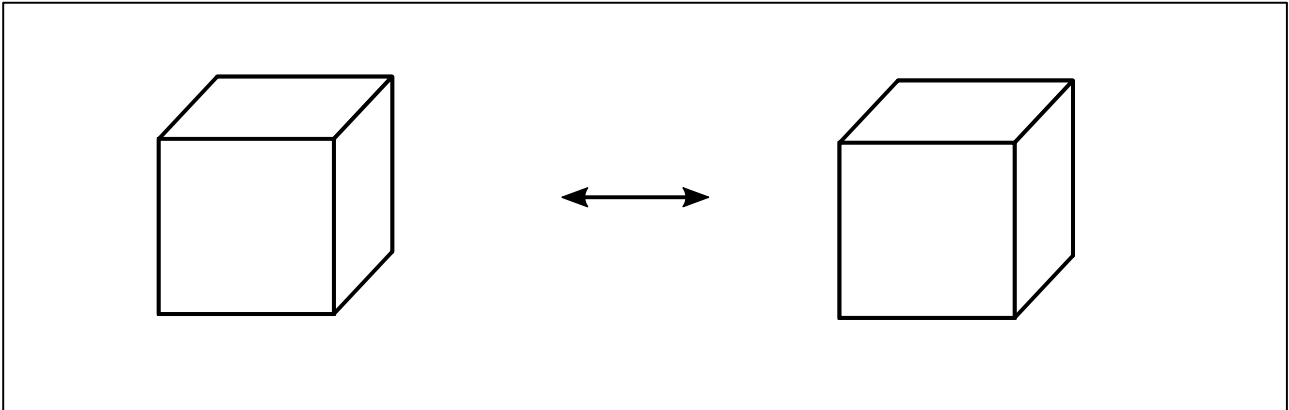
#### Beispiel



## 9.2 Festigkeitshypothesen

### 9.2.1 Vergleichsspannungen

Um den Vergleich zwischen einem mehrachsigen (Haupt-)Spannungszustand und einer einachsigen zulässigen Spannung  $\sigma_{zul}$  herstellen zu können, werden Vergleichsspannungen verwendet. Vergleichsspannungen transformieren dabei einen mehrachsigen auf einen schädigungsäquivalenten, einachsigen Spannungszustand.



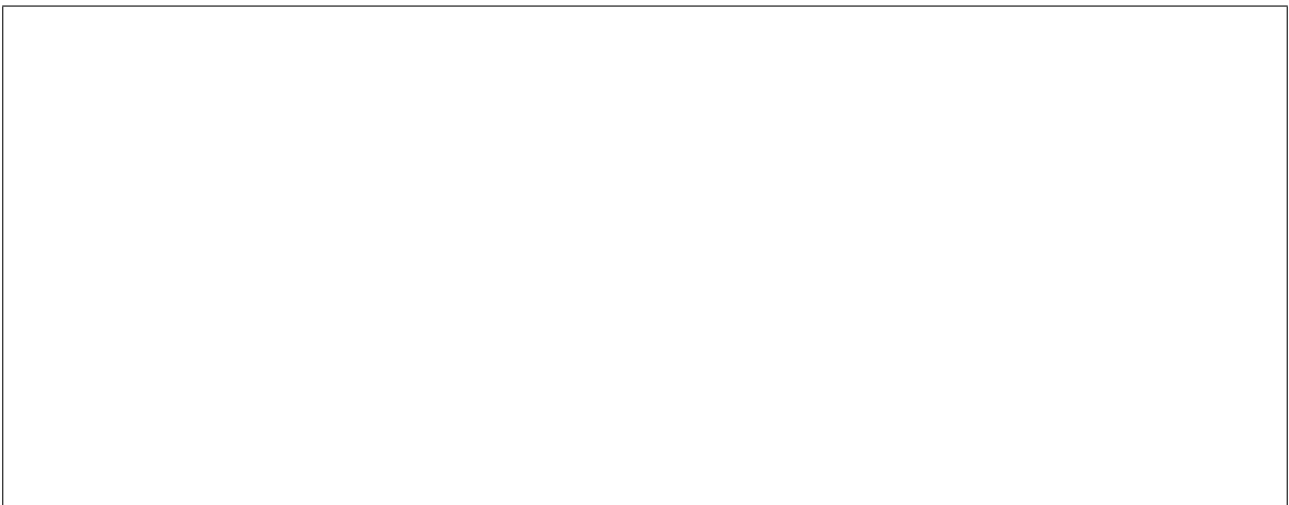
Die Vergleichsspannung  $\sigma_V$  kann dann mit der zulässigen Spannung  $\sigma_{zul}$  verglichen werden. Versagen tritt nicht ein, wenn gilt

$$\sigma_V \leq \sigma_{zul} \quad (5)$$

In der Literatur existieren verschiedene Ansätze zur Berechnung der Vergleichsspannung, sogenannte **Festigkeitshypothesen**. Die wichtigsten werden nachfolgend kurz beschrieben.

### 9.2.2 Normalspannungshypothese

Die Normalspannungshypothese nach RANKINE beschreibt das Versagen bei **Trennbruch**. Dieses Versagen tritt im Zugversuch bei **spröden** Materialien wie Keramik, Glas oder Eisenguss auf.



Die Vergleichsspannung entspricht der 1. Hauptspannung

$$\sigma_{V,NH} = \sigma_1 \quad (6)$$

### 9.2.3 Schubspannungshypothese

Die Schubspannungshypothese nach TRESCA beschreibt das Versagen bei **Gleitbruch**. Dieses Versagen tritt im Zugversuch bei **duktilen** Materialien wie Stahl, Aluminium oder Kupfer auf.



Die Vergleichsspannung entspricht der Differenz aus 1. und 3. Hauptspannung

$$\sigma_{V,SH} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (7)$$

Bei Wellen unter Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung ( $\sigma_{zz}$ ) mit überlagerter Torsion ( $\tau_T$ ) kann die Gleichung vereinfacht werden zu

$$\sigma_{V,SH} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4 \cdot \tau_T^2} \quad (8)$$

### 9.2.4 Gestaltänderungsenergiehypothese

Wird eine Struktur durch einen Spannungszustand beansprucht, so führt dies zu Änderungen des **Volumens** und der **Gestalt**. Der Spannungstensor kann dazu in einen volumenändernden und einen gestaltändernden Anteil aufgeteilt werden. Die Gestaltänderungsenergiehypothese nach HUBER, VON MISES und HENCKY basiert auf der Annahme, dass nur der Anteil der Spannungen zum Versagen führt, der eine Gestaltänderung der Struktur bewirkt.

Die Vergleichsspannung wird definiert durch

$$\sigma_{V,GEH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (9)$$

Für die ebene Betrachtung kann die Vergleichsspannung auch geschrieben werden als

$$\sigma_{V,GEH} = \sqrt{\sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz} + 6 \cdot \tau_{yz}^2} \quad (10)$$

Bei Wellen unter Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung ( $\sigma_{zz}$ ) mit überlagerter Torsion ( $\tau_T$ ) kann die Gleichung vereinfacht werden zu

$$\sigma_{V,GEH} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3 \cdot \tau_T^2} \quad (11)$$

## 9.3 Beispiel

