Folien zur Lehrveranstaltung

Mathematik für Medieninformatik

Prof. Dr. Marco Hamann
Dipl.-Math. Tommy Etling

HTW Dresden, Wintersemester 2022-23

Kapitel 2

Lineare Algebra

Prof. Dr. Marco Hamann
Dipl.-Math. Tommy Etling

HTW Dresden, Wintersemester 2022-23

Inhalt

von Kapitel 2: Lineare Algebra

Vektorräume

Einführung

Die Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

repräsentieren jeweils einen Punkt des entsprechenden Raumes $\mathbb{R}^n$.

Graphische Interpretation:
Pfeil vom Koordinatenursprung bis zu diesem Punkt.

- Ein Vektor ist durch seine Länge bzw. Norm $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, sowie seine Richtung bestimmt.
- Die Richtung wird durch die mit den Koordinatenachsen eingeschlossenen Winkel definiert:

$$\varphi_i = \arccos\left(\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|}\right).$$

Vektorräume

Definition

Definition (Vektorraum)

Die Menge $V := \mathbb{R}^2$ bzw. $V := \mathbb{R}^3$ bildet zusammen mit der Vektoraddition und der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ einen Vektorraum.

Schreibweise: $(V, +, \cdot)$.

Rechenregeln (Axiome)

- Vektoraddition ($\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$):
  - (V1) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$,
  - (V2) $\exists \mathbf{o} \in V :$ $v + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$,
  - (V3) $\exists -\mathbf{v} \in V :$ $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{o}$,
  - (V4) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
- Multiplikation mit einem Skalar ($\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$):
  - (S1) $\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\alpha \cdot \mathbf{v}) + (\alpha \cdot \mathbf{w})$,
  - (S2) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = (\alpha \cdot \mathbf{v}) + (\beta \cdot \mathbf{v})$,
  - (S3) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v})$,
  - (S4) $\alpha = 1 :\ 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Lineare Unabhängigkeit

Linearkombinationen von Vektoren

- Wir wissen, dass der $\mathbb{R}^2$ ein 2-dimensionaler Vektorraum ist.
  Was bedeutet der Begriff *Dimension*?
- Im $\mathbb{R}^2$ könnte man sagen, dass die Dimension die Anzahl der Einträge in einem Spaltenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ ist – nämlich genau 2 Stück.
- Es muss also noch eine andere Möglichkeit geben, um den Begriff der *Dimension* zu definieren.

Lineare Unabhängigkeit

Dimension

- Den $\mathbb{R}^2$ stellen wir uns ja normalerweise als zweidimensionales Koordinatensystem vor. Die Koordinatenachsen werden in diesem Raum von den Vektoren $(1,0)^\top$ und $(0,1)^\top$ repräsentiert.[1]

  Man kann nun jeden anderen Punkt in dem Raum darstellen als Summe dieser beiden Vektoren, jeweils multipliziert mit einem Skalar, z. B.:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Lässt sich jeder beliebige Vektor im $\mathbb{R}^2$ als Summe dieser beiden *Basisvektoren* multipliziert mit zwei Skalaren aus $\mathbb{R}$ darstellen?

  Oder gibt es einen Fall, in dem noch ein weiterer Vektor benötigt wird?

[1] Die Schreibweise der Vektoren unter Benutzung des Zeichens $^\top$ erfolgt hier aus Platzgründen und wird im Abschnitt zu Matrizen näher erläutert.

Lineare Unabhängigkeit

Linearkombinationen von Vektoren

Definition (Linearkombination)

Es sei V in $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ Vektoren und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ beliebige Skalare. Dann heißt

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \mathbf{v}_j = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m \quad (\in V)$$

Linearkombination der Vekoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$.

Lineare Unabhängigkeit

Linearkombinationen von Vektoren

Aufgabe (Linearkombination)

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{v}_1 = (2, 1)^\top$ und $\mathbf{v}_2 = (-2, 2)^\top$. Lässt sich $\mathbf{b} = (1, 5)^\top$ als Linearkombination aus $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ schreiben?

Lineare Unabhängigkeit

Linearkombinationen von Vektoren

Lösung

- Gesucht sind also $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Das ist nichts anderes als das System linearer Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcr} 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 5 \end{array}$$

- Auflösung führt zu $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = \frac{3}{2}$.
- Probe: Einsetzen!

Lineare Unabhängigkeit

Lineare Unabhängigkeit

Definition (Lineare Unabhängigkeit)

Wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ die einzige Möglichkeit ist, um die Vektorgleichung

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_m \cdot \mathbf{v}_m = \mathbf{o}$$

zu lösen, so nennt man die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ linear unabhängig. Andernfalls heißen die Vektoren linear abhängig.

Beachte: Der Nullvektor $\mathbf{o}$ ist per Definition linear abhängig.

Satz (Lineare Abhängigkeit)

Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ sind *linear abhängig* genau dann, wenn sich (irgend-)einer dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen schreiben lässt.

Lineare Unabhängigkeit

Lineare Unabhängigkeit

- Nach dem letzten Satz sind die Vektoren $(2,1)^\top$, $(-2,2)^\top$ und $(1,5)^\top$ aus unserer obigen Aufgabe also linear abhängig.

Aufgabe (Lineare Unabhängigkeit / - Abhängigkeit)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Lösen Sie dazu das LGS

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und prüfen Sie, ob $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ die einzige mögliche Lösung ist.

Lineare Unabhängigkeit

Basis & Dimension

- Die beiden letzten Aufgaben haben uns gezeigt, dass Vektoren linear abhängig oder unabhängig sein können.
- Im $\mathbb{R}^3$ können, wie wir gesehen haben, drei Vektoren linear unabhängig sein. Aber geht das auch mit vier Vektoren?
- Man kann sich also folgende Frage stellen:

  Wie groß ist denn die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in einem Vektorraum?
- Die Antworten auf diese Frage liefert der folgende Satz.

Lineare Unabhängigkeit

Basis & Dimension

Satz (Basis)

Eine maximale Menge von linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ wird Basis des Vektorraumes V bezeichnet. Jeder Vektor $\mathbf{v} \in V$ lässt sich als Linearkombination

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$

dieser Basisvektoren schreiben.

Die Anzahl der Vektoren in der Basis wird als Dimension des Vektorraumes V bezeichnet, kurz: $\dim(V)$.

Die Koeffizienten $\lambda_j \in \mathbb{R}$ sind *eindeutig* bestimmt und werden als Koordinaten von $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis bezeichnet.

Lineare Unabhängigkeit

Basis & Dimension

- Die Dimension muss nicht endlich sein, es gibt auch unendlich-dimensionale Vektorräume.
- Im $\mathbb{R}^2$ wäre eine mögliche Basis die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  der Einheitsvektoren (also der Koordinatenachsen). Diese Basis nennt man Standardbasis oder kanonische Basis.
- Alternativ könnte man aber auch jede andere Menge bestehend aus zwei linear unabhängigen Vektoren des $\mathbb{R}^2$ als Basis definieren.

In diese Richtung geht der nun folgende Satz, der für endlichdimensionale Vektorräume gilt.

Lineare Unabhängigkeit

Basis & Dimension

Satz

Für einen n-dimensionalen Vektorraum ist jede Menge mit n linear unabhängigen Vektoren eine Basis. Umgekehrt hat jede Basis genau n Vektoren.

Jede Menge mit weniger als n linear unabhängigen Vektoren kann durch Hinzunahme weiterer linear unabhängiger Vektoren zu einer Basis ergänzt werden.

Lineare Unabhängigkeit

Aufgabe

Aufgabe (Basis)

Aus der Aufgabe über lineare Unabhängigkeit wissen wir, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind und damit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Bestimmen Sie nun die *Koordinaten* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von $(1, -10, 4)^\top$ bezüglich dieser Basis.

Hinweis: Es ist also das LGS

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

Lösung: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -5, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}$.

Produkte mit Vektoren

Skalarprodukt

Definition (Skalarprodukt)

Das Produkt

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

wird kanonisches Skalarprodukt genannt. Es ist für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ definiert und liefert immer eine reelle Zahl.

Bemerkung:

Es gilt: $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\varphi)$, wobei φ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist. Folglich gilt für φ:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}\right).$$

Produkte mit Vektoren

Skalarprodukt – Beispiele

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{x}\| = 2, \ \|\mathbf{y}\| = 5, \ \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 60^\circ$$

Produkte mit Vektoren

Vektorprodukt

Definition (Kreuzprodukt)

Das Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt) zweier dreidimensionaler Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ist ein Vektor $\mathbf{z} := \mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, dessen Länge gleich der Fläche des von den Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist, d.h.

$$\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin(\varphi).$$

Der Vektor $\mathbf{z}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.
Das Kreuzprodukt berechnet sich wie folgt:

$$z := \mathbf{x} \times \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Vektoren und Vektorprodukte

Kreuzprodukt – Beispiele

Bemerkung

- Der Vektor $\mathbf{z} = \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ ist so orientiert, dass $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ und $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ in dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem** bilden (*Rechte-Hand-Regel*).

Beispiele

Vektoren und Vektorprodukte

Kreuzprodukt – Rechenregeln

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ sowie der Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelten:

Lfd.	**Regel**	**Bemerkung**
1	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$	Anti-Kommutativität
2	$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$	
3	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$	Distributivität
4	$\lambda \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \cdot \mathbf{b})$	Skalarvielfaches
5	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a}, \mathbf{b}$ linear abhängig	$\mathbf{o}$ … Nullvektor

Nachweis: Unter Zuhilfenahme der Definition sowie geometrischer Überlegungen.

Produkte mit Vektoren

Norm

- Im Folgenden beschäftigen wir uns mit zusätzlichen Eigenschaften von Vektorräumen, die wir am Beispiel der uns am besten vertrauten reellen Vektorräume veranschaulichen wollen.
- Wir wissen bereits, dass Vektoren im $\mathbb{R}^n$ nicht nur durch ihre Richtung charakterisiert werden, sondern auch durch ihre Länge. Ganz allgemein bezeichnet die *Länge* eines Vektors folgender Begriff:

Produkte mit Vektoren

Norm

Definition (Norm)

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to [0; \infty), \quad \mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$$

heißt Norm[2], wenn sie die folgenden *Axiome* erfüllt:

(N1) *Definitheit*: $\|\mathbf{v}\| = 0 \implies \mathbf{v} = \mathbf{o}$,

(N2) *Absolute Homogenität*: $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \mathbf{v} \in V: \ \|\alpha \cdot \mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$,

(N3) *Dreiecksungleichung*: $\forall \mathbf{v} \in V: \ \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

- Der Name *Dreiecksungleichung* stammt tatsächlich vom Dreieck: Die Summe der Längen zweier Dreiecksseiten ist immer größer als die Länge der dritten Seite.

[2] Für eine genauere Einordnung der Begriffsbildung, siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Normierter_Raum

Produkte mit Vektoren

Euklidische Norm

- Auf einem reellen Vektorraum definiert man die Euklidische Norm:[3]

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \quad \|\mathbf{v}\| := \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

  Manchmal setzt man als Index an die Euklidische Norm noch eine 2 ($\|\cdot\|_2$), um anzudeuten, dass es sich dabei um eine *Quadrierung* der Vektoreinträge und das Ziehen der *Quadratwurzel* handelt.

- Allgemein definiert man die p-Norm so:

$$\|\mathbf{v}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- Für $p \to \infty$ erhält man die sogenannte *Maximumsnorm*.

[3] Das ist nichts anderes als der Satz des Pythagoras im $\mathbb{R}^n$.

Produkte mit Vektoren

Beispiele

Für einen reellen Vektor $\mathbf{v} = (3, -2, 6)^\top$ berechnen sich beispielsweise

- 1-Norm
$$\|\mathbf{v}\|_1 = |3| + |-2| + |6| = 11$$
- 2-Norm
$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{|3|^2 + |-2|^2 + |6|^2} = \sqrt{49} = 7$$
- 3-Norm
$$\|\mathbf{v}\|_3 = \sqrt[3]{|3|^3 + |-2|^3 + |6|^3} = \sqrt[3]{251} \approx 6.308$$
- ∞-Norm
$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|3|, |-2|, |6|\} = 6$$

Maximumsnorm

Aufgabe

Aufgabe (Maximumsnorm)

Zeigen Sie, dass die Maximumsnorm $\|\cdot\|_{\max}$ definiert als

$$\|\mathbf{v}\|_{\max} := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i| \quad (= \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\})$$

die Normaxiome (N1) und (N2) erfüllt ((N3) ist schwieriger). Wie sieht der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ (= Kreis um den Ursprung) unter dieser Norm aus?

Maximumsnorm

Aufgabe – Lösung

Aufgabe (Maximumsnorm – Lösung)

Zeigen Sie, dass die Maximumsnorm $\|\cdot\|_{\max}$ definiert als

$$\|\mathbf{v}\|_{\max} := \max_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i| \quad (= \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\})$$

die Normaxiome (N1) und (N2) erfüllt ((N3) ist schwieriger). Wie sieht der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ (= Kreis um den Ursprung) unter dieser Norm aus?

Lösung:

(N1) $\|\mathbf{v}\|_{\max} = 0 \implies \max_i\{|v_i|\} = 0 \implies \forall i: \ v_i = 0 \implies \mathbf{v} = \mathbf{o}$

(N2) $\|\alpha \cdot \mathbf{v}\|_{\max} = \max_i\{|\alpha \cdot v_i|\} = \max_i\{|\alpha| \cdot |v_i|\} = |\alpha| \cdot \max_i\{|v_i|\} = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|_{\max}$

Maximumsnorm

Aufgabe – Lösung

- Der Einheitskreis ist gerade ein Quadrat mit der Kantenlänge 2 und dem Schwerpunkt $(0, 0)$.

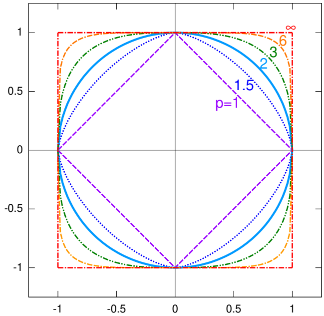


Abbildung: Einheitskreise der p-Norm im $\mathbb{R}^2$ für unterschiedliche p

Inhalt

von Kapitel 2: Lineare Algebra

Definitionen und Begriffe

Definition

Definition (Matrix)

Eine Matrix A vom Typ (m, n) über $\mathbb{K}$ ist eine Anordnung von $m \cdot n$ Elementen aus $\mathbb{K}$ in m Zeilen und n Spalten.

Bemerkungen

- Man schreibt allgemein

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(m,n)}.$$

- Die Elemente von $\mathbb{K}$ werden skalare Größen genannt. Bei uns gilt meist $\mathbb{K} := \mathbb{R}$.

Definitionen und Begriffe

Beispiele

1. $A \in \mathbb{R}^{(2,4)}: \; A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
2. $B \in \mathbb{R}^{(4,1)}: \; B := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
3. $C \in \mathbb{K}^{(1,1)}: \; C := (c)$
4. $D \in \mathbb{K}^{(1,n)}: \; D := \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \end{pmatrix}$ Zeilenvektor der Länge n
5. $E \in \mathbb{K}^{(m,1)}: \; E := \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{m1} \end{pmatrix}^\top$ Spaltenvektor der Länge m
6. Für $m = n$, $F \in \mathbb{K}^{(n,n)}: \; F := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

   F ist eine quadratische Matrix der Ordnung n.

Definitionen und Begriffe

Spezielle Matrizen

1. Nullmatrix: $\mathbf{O}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1,2)}$
2. Einheitsmatrix der Ordnung 2: $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$

   Allgemein: Einheitsmatrix der Ordnung n:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Rechnen mit Matrizen

Gleichheit von Matrizen

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Definition (Gleichheit)

Es seien zwei Matrizen A und B gegeben. Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ und $B \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ und $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ erfüllt sind.

Rechnen mit Matrizen

Rechenoperationen

1. Addition:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} =$$

2. Skalare Multiplikation:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

Rechnen mit Matrizen

Rechenoperationen

3. Transposition:

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}^\top =$$

$$B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^\top =$$

4. Negative Matrix:

$$-A = (-1) \cdot A$$

5. Differenz von A und B, falls $A, B \in \mathbb{K}^{(m,n)}$:

$$A - B = A + (-B)$$

Rechnen mit Matrizen

Rechenregeln

Satz (Rechenregeln für Matrizen)

Es seien die Matrizen $A, B, C \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ und die skalaren Größen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann gelten folgende Rechenregeln:

(R1) Assoziativgesetz (Addition): $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(R2) Kommutativgesetz (Addition): $A + B = B + A$.

(R3) $A + \mathbf{O} = A$, $A - A = \mathbf{O}$, $-(-A) = A$.

(R4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

(R5) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = \mathbf{O}$.

(R6) $(A^\top)^\top = A$.

(R7) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$.

(R8) $(\alpha \cdot A)^\top = \alpha \cdot A^\top$.

Rechnen mit Matrizen

Matrixmultiplikation

Definition (Matrizenmultiplikation)

Gegeben sin zwei Matrizen $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ und $B \in \mathbb{K}^{(n,p)}$, dargestellt mittels

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{pmatrix}^\top \quad \text{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_p \end{pmatrix}$$

d. h. über ihre Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.

Das Produkt $C = A \cdot B$ ist definiert als eine Matrix vom Typ $\mathbb{K}^{(m,p)}$ mit

$$C = (c_{jk})_{j=1,\dots,m\,;\,k=1,\dots,p} \quad \text{mit} \quad c_{jk} = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_k$$

worin

$$\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^n$$

das kanonische Skalarprodukt der Vektoren bezeichnet.

Rechnen mit Matrizen

Matrixmultiplikation

Beispiele

(a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

Rechnen mit Matrizen

Matrixmultiplikation

Beispiele

(b) $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} =$$

Rechnen mit Matrizen

Matrixmultiplikation

Beispiele

(b*) $D \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

Rechnen mit Matrizen

Matrixmultiplikation

Beispiele

(c) $F := \begin{pmatrix} -16 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

$$F \cdot G = \begin{pmatrix} -16 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix} =$$

Rechnen mit Matrizen

Matrixmultiplikation

Beispiele

(c*) $$G \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

Rechnen mit Matrizen

Matrixmultiplikation

Bemerkung

Im Allgemeinen gilt

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

d. h. die Matrixmultiplikation ist - auch bei passendem Typ - **nicht** kommutativ.

Rechnen mit Matrizen

Rechenregeln

Satz (Rechenregeln für Matrizen – *Fortsetzung*)

Es seien die Matrizen passenden Typs A, B und C sowie die skalare Größe $\alpha \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann gelten folgende Rechenregeln:

(R9) Assoziativgesetz (Multiplikation): $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

(R10) Falls $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$: $E_n \cdot A = A, \quad A \cdot E_n = A$.

(R11) Distributivgesetz:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ und } (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

(R12) $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$.

(R13) $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$.

Rechnen mit Matrizen

Inverse Matrix

Definition (Inverse Matrix)

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ heißt invertierbar (oder regulär), wenn gilt:

$$\exists\, B \in \mathbb{K}^{(n,n)} : \quad A \cdot B = B \cdot A = E_n.$$

Die Matrix B heißt inverse Matrix von A, geschrieben $B := A^{-1}$.

- Nur quadratische Matrizen können eine Inverse besitzen.
- Nicht jede quadratische Matrix ist invertierbar. Ist also eine quadratische Matrix nicht invertierbar, so heißt sie **singulär**.

Rechnen mit Matrizen

Berechnung der inversen Matrix

Gauss-Jordan-Algorithmus

gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, gesucht: $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3 & 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_4 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_3 & 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Systeme linearer Gleichungen (purpur,blau) besitzen die Lösungen

$$x_1 = -3\,, \quad x_3 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2\,, \quad x_4 = -1$$

Die zu A inverse Matrix ergibt sich schließlich zu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Berechnung der inversen Matrix

Gauss-Jordan-Algorithmus

gegeben: $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, gesucht: $A^{-1} = ?$

$$\left.\begin{array}{rcccc} & A & \cdot & X & = & E_n \\ \Leftrightarrow & E_n & \cdot & X & = & A^{-1} \end{array}\right\} \quad \sim \quad \left\{\begin{array}{rc} & A \mid E_n \\ \Leftrightarrow & E_n \mid A^{-1} \end{array}\right.$$

Forme das System linearer Gleichungen um

$$A \mid E_n \quad \rightsquigarrow \quad E_n \mid A^{-1}$$

Benutze nachstehende **Umformungsschritte**:

- Multipliziere alle Elemente einer Zeile mit derselben Zahl.[4]
- Addiere ein Vielfaches einer Zeile zum Vielfachen einer anderen.[4]

[4] Die Skalare sind verschieden von Null zu wählen.

Rechnen mit Matrizen

Berechnung der inversen Matrix

Gauss-Jordan-Algorithmus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

Rechnen mit Matrizen

Berechnung der inversen Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

Rechnen mit Matrizen

Matrizengleichung

Aufgabe

Lösen Sie die Gleichung $A \cdot X + B = C$ für die folgenden gegebenen Matrizen A, B und C:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rechnen mit Matrizen

Matrizengleichung

Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man in der Aufgabenstellung X und A vertauscht? D.h. gesucht sei nun $\tilde{X}$ in

$$\tilde{X} \cdot A + B = C.$$

Rechnen mit Matrizen

Matrizengleichung

Bemerkung

Matrixmultiplikation ist **nicht** kommutativ! Die Richtung der Multiplikation beim Auflösen einer Matrizengleichung nach X ist also essentiell!

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Vektoren und Matrizen)

1. Nachdem Sie die Voraussetzungen geprüft haben, führen Sie sowohl **Addition** als auch **Multiplikation** an gegebenen Matrizen durch.
2. Sie berechnen die inverse Matrix als Lösung einer Matrixgleichung oder mit Hilfe mit dem **Gauß-Jordan-Algorithmus** für höherdimensionale Matrizen.
3. Sie lösen eine **Matrixgleichung** nach der Unbekannten auf. Dabei beachten Sie, dass die Existenz inverser Matrizen gesichert sein muss, und dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.
4. Sie charakterisieren einen **Vektor** durch seinen **Betrag** und seine **Richtung**.
5. Sie bilden verschiedene **Produkte** von Vektoren und bestimmen, ob das Ergebnis ein Vektor oder ein Skalar ist.

Inhalt

von Kapitel 2: Lineare Algebra

Determinanten

Einleitendes Beispiel

Es sei folgende Tabelle (Matrix) gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun eine (reelle) Zahl, wir nennen sie *Determinante*, die eine Eigenschaft der gegebenen Matrix sein soll. Man schreibt:

$$\det(A) := \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$$

Determinanten

Einleitendes Beispiel

Wie berechnet sich die Determinante der obigen Matrix A?

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} =$$

Allgemein gilt also für die Determinante 2. Ordnung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Determinanten

Einleitendes Beispiel

Wie berechnet sich dann die Determinante 3. Ordnung von

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ?$$

(1) Dreiecksmatrix:

Determinanten

Einleitendes Beispiel

(2) Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \end{vmatrix} =$$

Determinanten

Einleitendes Beispiel

(3) Rekursive Formel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \end{vmatrix} =$$

Determinanten

Entwicklungssatz

Satz (LAPLACE´scher Entwicklungssatz nach i-ter Zeile)

Für die Berechnung der Determinante einer $(3,3)$-Matrix A gilt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+i} a_{ik} \det \underbrace{\left(U_{ik}(A)\right)}_{\text{Untermatrix}} .$$

Determinanten

Beispiele

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$

Determinanten

Beispiele

(b) $\begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 3 & 10 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} =$

Determinanten

Beispiele

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 10 \end{vmatrix} =$

Determinanten

Beispiele

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 10 & 10 \\ 1 & 2 & 8 & 10 \end{vmatrix} =$

Determinanten

Rechenregeln

Gegeben sind eine n-reihige reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit der Spaltenvektordarstellung

$$A = \left(\ldots s_i \ldots s_j \ldots \right) \quad \text{wobei} \quad s_i, s_j \in \mathbb{R}^n \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

sowie $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$. Es gelten:

Regel	Änderung der Matrix	Eigenschaft der Determinante
1	Transposition der Matrix $A \to A^\top$	$\det A = \det A^\top$
2	Vertauschen zweier Spalten $A \to \left(\ldots s_j \ldots s_i \ldots \right) =: B$	$\det A = -\det B$
3	Addieren des Vielf. einer and. Spalte $A \to \left(\ldots s_i + \nu \cdot s_j \ldots s_j \ldots \right) =: C$	$\det A = \det C$
4	Vielfaches einer Spalte $A \to \left(\ldots \lambda \cdot s_i \ldots s_j \ldots \right) =: D$	$\det A = \lambda \cdot \det D$

Ist ebenso $B \in \mathbb{R}^{n,n}$, so gilt stets der Multiplikationssatz $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Inhalt

von Kapitel 2: Lineare Algebra

Anwendungen von Matrizen

Motivation

Geometrische Transformationen in der Computergrafik

- Geometrische Objekte werden oft durch Punkte

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \sim \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^\top$$

  und Teilmengen dieser beschrieben.

- Unter dem Begriff geometrische Transformation versteht man die Lage- und Formänderung einer solchen Punktmenge im Raum $\mathbb{R}^n$.

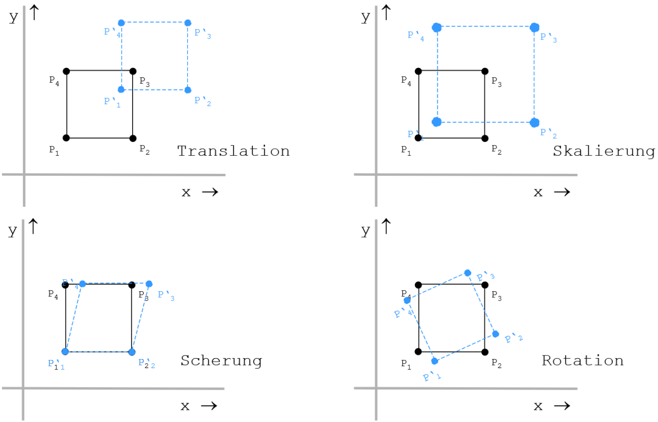
Beispiele: Kreise, Ellipsen, "Extrusion" von Profilkurven etc.[4]

[4] Geometrische Transformationen sind ein zentrales Thema im Modul I-381 - Geometrie.

Anwendungen von Matrizen

Motivation

Geometrische Transformationsstandards sind zum Beispiel:



Quelle: `https://www.matheretter.de/img/lina/image20.svg`

Geometrische Transformationen

Definition

Definition (Geometrische Transformation)

Geometrische Transformationen sind Abbildungen

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}' := A \cdot \mathbf{p},$$

die durch Multiplikation einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit einem Vektor $P \in \mathbb{R}^n$ gegeben sind.

Im Folgenden werden die Matrizen zur Beschreibung von

- Drehungen / Rotationen,
- Skalierungen (u. a. zentrische Streckungen),
- Verschiebungen / Translationen

vorgestellt.

Transformationen in 2D mit Matrizen

Drehung der Ebene

Die Drehung eines Punktes $P(x, y)$ um den Punkt O(0,0) ist beschrieben

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

worin φ den Drehwinkel beschreibt.

Beispiel

Transformationen in 2D mit Matrizen

Drehung der Ebene

Sonderfall: Punktspiegelung am Ursprung des Koordinatensystems

Frage: Wie sieht die Matrix zu einer Punktspiegelung in $\mathbb{R}^2$ aus?

Transformationen mit Matrizen

Drehung des Raums

Drehungen des $\mathbb{R}^3$ um die Koordinatenachsen sind gegeben durch:

$$D_x(\varphi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$D_y(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$D_z(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Argument φ bezeichnet darin den Drehwinkel.

Transformationen in 2D mit Matrizen

Skalierung der Ebene

Die zweireihige Matrix

$$S := \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Abbildung, die die Koordinaten eines jeden Punktes $P(x, y)$ der Ebene jeweils um den Faktor s_x und s_y streckt

$$x_{\text{neu}} = s_x \cdot x, \quad y_{\text{neu}} = s_y \cdot y,$$

oder in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{p}' = S \cdot \mathbf{p} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

letztere Darstellung unter Verwendung der Komponenten von S und $\mathbf{p}$.

Transformationen in 2D mit Matrizen

Skalierung der Ebene

Sonderfall: Reflexion (Spiegelung am Koordinatenursprung)

Die Spiegelung an einer Koordinatenachse ist ein Sonderfall der Skalierung mit $s_x = -1$ oder $s_y = -1$.

Matrix der Spiegelung an der x-Achse:

Matrix der Spiegelung an der y-Achse:

Transformationen in 2D mit Matrizen

Skalierung der Ebene

Sonderfall: Reflexion (Spiegelung am Koordinatenursprung)

Was passiert, wenn zuerst an der x-Achse und dann an der y-Achse gespiegelt wird?

Transformationen mit Matrizen

Skalierung des Raums

Frage: Wie sieht dann die Matrix zu einer Skalierung im $\mathbb{R}^3$ aus?

Transformationen in 2D mit Matrizen

Verschiebung der Ebene

Problem: Angenommen, wir wollen den Punkt

$$P(x, y) \quad \sim \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$$

und so jeden anderen Punkt der Ebene nach rechts verschieben.

Wie könnten wir diesen Vorgang algebraisch beschreiben?

Transformationen in 2D mit Matrizen

Verschiebung der Ebene

Frage: Wie ist eine Verschiebung eines Vektors durch eine Multiplikation mit einer Matrix realisierbar?

Lösung: Homogene Koordinaten.

- Einbettung des $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Einbettung des $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^4$ durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformationen in 2D mit Matrizen

Verschiebung der Ebene

Eine Verschiebung der Ebene $\mathbb{R}^2$ um den konstanten Vektor

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} x_v & y_v \end{pmatrix}^\top$$

wird dargestellt durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + x_v \\ y + y_v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_v \\ 0 & 1 & y_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformationen mit Matrizen

Verschiebung des Raums

Frage: Wie sieht dann die Matrix zu einer Verschiebung um den Vektor

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}^\top$$

im Raum $\mathbb{R}^3$ aus?

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Drehung, Skalierung, Verschiebung)

1. Sie schreiben formal die Definition einer **geometrischen Transformation** in einem Vektorraum auf.
2. Sie formulieren **Drehungen**, **Skalierungen** bzw. **Verschiebungen** durch geeignete Matrixmultiplikationen sowohl im $\mathbb{R}^2$ als auch im $\mathbb{R}^3$.
3. Sie betten den $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^{n+1}$ durch **homogene Koordinaten** ein.

Lineare Gleichungssysteme

Beispiele

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 8 \end{array}.$$

In Matrixform:

Lineare Gleichungssysteme

Beispiele

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

In Gleichungsform:

Lineare Gleichungssysteme

Allgemeine Definition

Allgemein schreibt man ein lineares Gleichungssystem wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\
a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}\cdot x_1 & + & a_{m2}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{mn}\cdot x_n & = & b_m
\end{array}$$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$ heißen Koeffizienten des LGS,

$b_i \in \mathbb{K}$ heißen Störglieder des LGS.

Lineare Gleichungssysteme

Allgemeine Definition – Matrixschreibweise

Ein LGS lässt sich wie folgt in Matrixschreibweise überführen:

$$\boxed{A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Homogene und inhomogene LGS

Definition

Ein LGS heißt homogen, falls für die rechte Seite $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ (Nullvektor) gilt.

Andernfalls heißt das LGS inhomogen.

Lösungsverhalten

Homogenes LGS	**Inhomogenes LGS**
entweder genau eine Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ *oder* unendlich viele Lösungen	entweder genau eine Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ *oder* unendlich viele Lösungen *oder* keine Lösung

Lineare Gleichungssysteme

Lösen eines LGS

Der Gauß´sche Algorithmus

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Definition (Elementare Zeilenumformungen)

1. Vertauschung zweier Zeilen,
2. Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl $\alpha \neq 0$,
3. Addition (eines Vielfachen) einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Lineare Gleichungssysteme

Lösen eines LGS

Erweiterte Koeffizientenmatrix in gestaffelter Form

$$(A^*|\mathbf{b}^*) = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1r}^* & a_{1,r+1}^* & \dots & a_{1n}^* & b_1^* \\
0 & a_{22}^* & \dots & a_{2r}^* & a_{2,r+1}^* & \dots & a_{2n}^* & b_2^* \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & a_{rr}^* & a_{r,r+1}^* & \dots & a_{rn}^* & b_r^* \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1}^* \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m^*
\end{array}\right)$$

worin für die Matrixkomponenten gilt:

$$a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$$

Lineare Gleichungssysteme

Beispiele (Gauß-Algorithmus)

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ x_1 & - & 5x_2 & = & -4 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme

Rang einer Matrix

Definition (Rang)

Die Anzahl der Zeilen in einer gestaffelten Matrix A, die von Null verschiedene Elemente enthalten, heißt Rang der Matrix A, kurz $r(A)$.

Satz (Rangkriterium)

Ein LGS $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit n Unbekannten ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$r(A) = r(A|\mathbf{b})$$

(1) $r(A|\mathbf{b}) = n \quad \Rightarrow$ LGS besitzt **genau eine** Lösung.

(2) $r(A|\mathbf{b}) < n \quad \Rightarrow$ LGS besitzt **unendlich viele** Lösungen, die von $n - r(A|\mathbf{b})$ freien Parametern abhängen.

Ein LGS $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist genau dann nicht lösbar, wenn gilt:

$$r(A) \neq r(A|\mathbf{b})$$

Lineare Gleichungssysteme

Beispiele (Gauß-Algorithmus)

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Beispiele (Rangkriterium)

(c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

Motivation

Wie die Google-Gründer Larry Page und Sergey Brin mit simpler Mathematik Milliardäre wurden...

Eigenwertprobleme

Betrachte die Gleichung $A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ mit $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Eigenwertprobleme

Definition

Definition (Eigenwert und Eigenvektor)

Ein Wert $\lambda \in \mathbb{R}$, für den es mindestens eine nichttriviale Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ des linearen Gleichungssystems

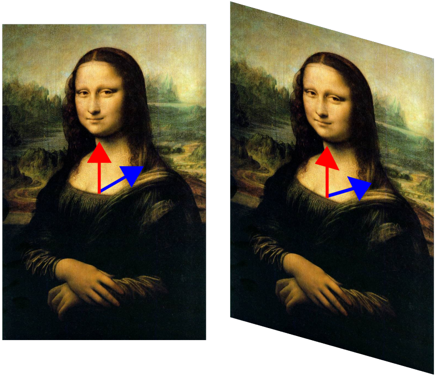
$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

gibt, heißt Eigenwert der Matrix A. Jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, der dieses lineare Gleichungssystem erfüllt, heißt Eigenvektor der Matrix A.

- Ein **Eigenvektor** einer linearen Abbildung ist in der linearen Algebra also ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, dessen Richtung durch die Abbildung *nicht* verändert wird.
- Ein Eigenvektor wird also nur skaliert und man bezeichnet den Skalierungsfaktor als **Eigenwert** der Abbildung.

Eigenwertprobleme

Bedeutung



In dieser **Scherung** der Mona Lisa wurde das Bild so verformt, dass der rote Vektor seine Richtung (entlang der vertikalen Achse) nicht geändert hat, der blaue Vektor jedoch schon. Der rote Vektor ist also ein **Eigenvektor** der Scherabbildung, der blaue Vektor aufgrund seiner Richtungsänderung nicht. Da der rote Vektor nicht skaliert wird, ist sein **Eigenwert** 1.

Quelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/Eigenwertproblem`

Eigenwertprobleme

Quiz

Quiz

Welcher der drei Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda = 1$?

1. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Eigenwertprobleme

Charakteristisches Polynom

Es ist also das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot E) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ zu lösen.
Unter welchen Bedingungen gibt es nichttriviale Lösungen?

$\det(A - \lambda \cdot E) =$

Eigenwertprobleme

Beispiel – Berechnung Eigenwert und Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$$

Eigenwertprobleme

Beispiel – Berechnung Eigenwert und Eigenvektor

Lösung

Der zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörige Eigenvektor berechnet sich

$$\mathbf{x}_1 = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Der zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$ gehörige Eigenvektor berechnet sich

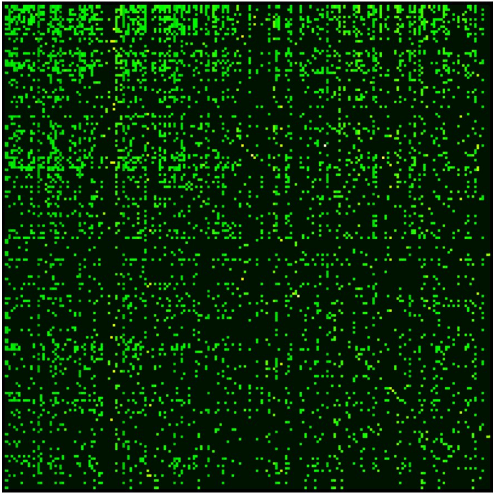
$$\mathbf{x}_2 = \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Bemerkung

Der durch die beiden Eigenvektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ aufgespannte Eigenraum ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

Eigenwertprobleme

Google-Matrix (Ausschnitt)



Quelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/Google-Matrix`

Eigenwertprobleme

Google-Matrix

- Die **Google-Matrix P** ist eine quadratische Matrix, die bei der Konstruktion des *PageRank*-Algorithmus entsteht.
- Der **PageRank**-Algorithmus dient dazu, eine Menge verlinkter Dokumente, z.B. das WWW, anhand ihrer Struktur zu bewerten und zu gewichten.
- Da die Google-Matrix **P** oftmals sehr groß ist (viele Millionen Zeilen und Spalten), sind die numerischen und algebraischen Eigenschaften dieser Matrix für die schnelle und exakte Bestimmbarkeit der PageRanks von großer Bedeutung.
- Zur Berechnung des PageRanks ist man insbesondere an den Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{P}^\top$ zum Eigenwert 1 interessiert...

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (LGS & Eigenwertprobleme)

1. Sie überführen ein lineares Gleichungssystem in **Matrixform** und vice versa.
2. Sie benennen den Unterschied zwischen **homogenen** und **inhomogenen** LGS und treffen Aussagen über das Lösungsverhalten.
3. Sie wenden **elementare Zeilenumformungen** auf die **erweiterte Koeffizientenmatrix** eines LGS an.
4. Nachdem Sie ein LGS in eine gestaffelte Matrix überführt haben, geben Sie die **Lösungsmenge** des LGS in Vektorschreibweise an. Dabei erkennen Sie, wie viele Lösungen das LGS besitzt.
5. Sie überprüfen die Lösbarkeit eines LGS mittels **Rangkriterium**.
6. Sie bestimmen das **charakteristische Polynom** einer quadratischen Matrix.
7. Sie berechnen alle **Eigenwerte** einer Matrix samt der dazugehörigen **Eigenvektoren**.