

Musterlösung

Aufgabe: Welche drei Lösungen $z \in \mathbb{C}$ erfüllen die Gleichung

$$\left(\frac{2}{i}\right)^3 + z^3 = 0?$$

Geben Sie die Lösung in exponentieller und in arithmetischer Form an.

Lösung: Zunächst formen wir die Gleichung um zu:

$$z^3 = -\left(\frac{2}{i}\right)^3.$$

Damit wird klar, dass die Aufgabe darin besteht die dritten Wurzeln der komplexen Zahl $-\left(\frac{2}{i}\right)^3$ zu bestimmen.

Da man die Wurzeln am besten aus der trigonometrischen oder auch exponentiellen Form bestimmen kann, berechnen wir nun Betrag und Argument dieser komplexen Zahl.

1. Als erstes sollte man $\frac{2}{i}$ in algebraischer Form als komplexe Zahl aufzuschreiben und potenzieren.

(i) Es ist

$$\frac{2}{i} = \frac{2(-i)}{i(-i)} = \frac{-2i}{1} = -2i,$$

durch Erweitern mit $-i$, der konjugiert komplexen Zahl zu i . (Man kann natürlich auch sofort mit $\frac{1}{i} = -i$ multiplizieren.) Damit erhält man

$$\left(\frac{2}{i}\right)^3 = (-2i)^3 = (-1)^3 2^3 i^3 = (-1)8(-i) = 8i \quad \text{und} \quad -\left(\frac{2}{i}\right)^3 = -8i.$$

(ii) Alternativ kann man auch zunächst Potenzieren und dann zur komplexen Zahl übergehen:

$$-\left(\frac{2}{i}\right)^3 = -\frac{2^3}{i^3} = -\frac{8}{-i} = \frac{8}{i} = \frac{8(-i)}{i(-i)} = -8i.$$

2. Nun ist der Betrag und das Argument zu berechnen:

$$|8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$$

und $-8i$ liegt auf der negativen imaginären Achse, d.h. $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Die trigonometrische/exponentielle Form ist folglich

$$-\left(\frac{2}{i}\right)^3 = 8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 8e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

3. Zum Abschluß sind die 3. Wurzeln aus dieser komplexen Zahl anzugeben. Es gilt

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{R} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right), k = 0, 1, \dots, n-1, \\ &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) \right), k = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2 \cdot 3} + i \sin \frac{3\pi}{2 \cdot 3} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \pi \right) = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ z_1 &= 2 \left(\cos \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{3\pi + 4\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi + 4\pi}{6} \right) \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \approx -1,73 - i, \\ z_2 &= 2 \left(\cos \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{3\pi + 8\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi + 8\pi}{6} \right) \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} \approx 1,73 - i. \end{aligned}$$

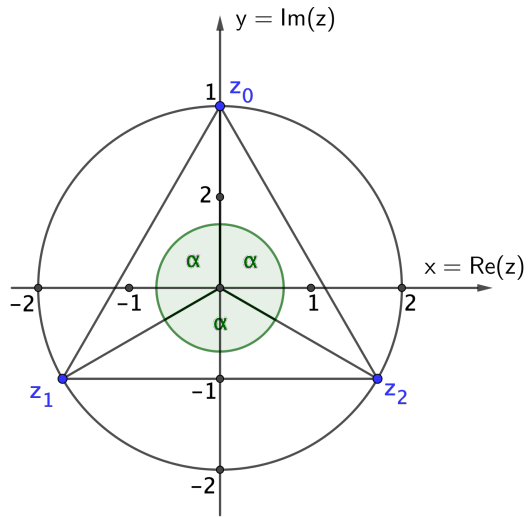


Abbildung 1: 3. Wurzeln

In einer Skizze kann man die Wurzeln veranschaulichen.

Sie liegen alle auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius 2 und bilden ein regelmäßiges (gleichseitiges) Dreieck.

Für den Winkel gilt $\alpha = 120^\circ$.