# Dgl $n$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Begriff und Lösung

Eine lineare Dgl $n$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt die Form

$$a_n \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = q(x) \qquad (1)$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0; 1; \ldots; n\}$, gegeben sind; $q(x)$ bezeichnet das Störglied. Für $q(x) \equiv 0$ heißt Gleichung (1) *homogen*, für $q(x) \not\equiv 0$ *inhomogen*.

**Lösung.** Analog zu $n = 2$ besitzt die allgemeine Lösung der Dgl (1) die Form

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

mit den Anteilen $y_0(x)$ bzw. $y_p(x)$ aus homogener[1] bzw. inhomogener[2] Dgl.

[1] genauer: allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

[2] genauer: eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

**Lösung.** Analog $n = 2$ hat die allgemeine Lösung der homogenen Dgl die Form

$$y_0(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x)$$

mit $n$ linear unabhängigen Lösungen $y_j(x)$, $j \in \{1; 2; \ldots; n\}$ und $C_j \in \mathbb{R}$.

Berechne die charakteristische Gleichung

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0 \tag{2}$$

durch Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ in die zugehörige homogene Dgl.

Die Lösungen $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\ldots \lambda_n$ von (2) erfüllen einen der folgenden Fälle:

(a) $\lambda_j$ ist eine $r$-fache reelle Nullstelle ($r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq n$).

(b) $\lambda_j$ ist eine $r$-fache komplexe Nullstelle ($r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$).

**Lösung.** Analog zu $n = 2$ ergeben sich die Lösungen der homogenen Dgl:

| $\lambda_j \in \mathbb{R}$ | $\lambda_j = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ |
|---|---|
| $y_{j_1}(x) = e^{\lambda_j x}$ | $y_{j_1}(x) = \cos(bx) \cdot e^{ax}$ |
| | $y_{j_2}(x) = \sin(bx) \cdot e^{ax}$ |
| $y_{j_2}(x) = x \cdot e^{\lambda_j x}$ | $y_{j_3}(x) = x \cdot \cos(bx) \cdot e^{ax}$ |
| | $y_{j_4}(x) = x \cdot \sin(bx) \cdot e^{ax}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $y_{j_r}(x) = x^{r-1} \cdot e^{\lambda_j x}$ | $y_{j_{2r-1}}(x) = x^{r-1} \cdot \cos(bx) \cdot e^{ax}$ |
| | $y_{j_{2r}}(x) = x^{r-1} \cdot \sin(bx) \cdot e^{ax}$ |

Tabelle: Lösungen $y_j(x)$ entspr. der Zähligkeit von $\lambda_j$ als Lösung von (2).

Die Berechnung von $y_p(x)$ erfolgt analog zur Ordnung 2 mit Störgliedansätzen.