Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Michael Meinhold

Dresden, 27. September 2023

Mathematik für Ingenieure - WS2023/24
Übungsblatt 1

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Entscheiden und begründen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums, ob die unendlichen Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots + \frac{1}{(2k)!} + \frac{1}{(2k+2)!} + \ldots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (d) $\displaystyle\frac{2^1}{1} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + - \ldots .$

konvergieren oder divergieren.

Aufgabe 2: Die zur unendlichen Zahlenfolge

$$n \mapsto a_n = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \emptyset)$$

gebildete unendliche Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ der Partialsummen mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

heißt *harmonische Reihe.*

(a) Bilden Sie die Teilsummen s_n zum Index $n = 2^m$ und schätzen Sie diese durch Vergleichssummen von Potenzen $\frac{1}{2^p}$ mit $p \in \{0, 1, \ldots, m\}$ nach unten ab.

(b) Zeigen Sie mithilfe von Teilaufgabe ((a)), dass die Reihe $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ keinen Grenzwert besitzt.

(c) Untersuchen Sie die unendliche Reihe $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

auf Konvergenz durch Vergleich mit der harmonischen Reihe.

Aufgabe 3: Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz mit Hilfe des *Majoranten- bzw. Minorantenkriteriums.*

(a) $\displaystyle\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+4k}}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(1+k^2)}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k + k\sin(k)}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{k + 7\sqrt{k}}{k^2 + (-1)^k k}$

Nutzen Sie als Vergleichsreihe:

- *allgemeine Harmonische Reihe:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist $\begin{cases} \text{konvergent} & \text{für } \alpha > 1 \\ \text{divergent} & \text{für } \alpha \leq 1 \end{cases}$

Aufgabe 4: Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz mit Hilfe des *Leibnizkriteriums.*

(a) $\sum_{k=7}^{\infty} \frac{k}{k+1}(-1)^k$ (b) $\sum_{k=7}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{4k+1}}$ (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}$

Aufgabe 5: Gegeben sind die Funktionen f_k ($k \in \mathbb{N}$) der reellen Variablen x,

$$f_k : x \mapsto f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Geben Sie die Glieder $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_{10}(x)$ und $s_{100}(x)$ der Funktionenreihe $(s_n(x))_{n=0}^{\infty}$ mit

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$$

an und skizzieren Sie deren Funktionsgraphen zusammen im Intervall $[-1, 1]$.

(b) Bestimmen Sie die Grenzfunktion (Summe der Funktionenreihe) $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 6: Geben Sie jeweils, sofern möglich, eine Folge mit den angegebenen Eigenschaften an!

(a) (a_n) sei nach oben beschränkt.

(b) (b_n) sei beschränkt und streng monoton steigend.

(c) (c_n) sei beschränkt, aber nicht konvergent.

(d) (d_n) sei unbeschränkt, aber nicht monoton.

(e) (e_n) sei unbeschränkt und konvergent.

(f) (f_n) sei monoton, beschränkt, aber nicht konvergent.

Aufgabe 7: Berechnen Sie mit der Formel für die Partialsumme der geometrischen Reihe:

(a) $\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (c) $\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Aufgabe 8: Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Verwenden Sie dazu jeweils eines der folgenden Konvergenzkriterien: *notwendiges Kriterium, Quotientenkriterium, Wurzelkriterium.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$

(b) $\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{6} + \frac{81}{8} + \frac{243}{10} \dots$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

(d) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n-2)!2^n}{(2n)!}$

Aufgabe 9: Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz mittels Majoranten bzw. Minoranten:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-n}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$, (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+10}$.