Luca Etienne Schulz
Matrikelnummer 5165836
luca_etienne.schulz@mailbox.tu-dresden.de

2. Übungsblatt für die Übungen vom 28.10.2024 - 01.11.2024

Matrizen

N2.2 Hausaufgabe (Nachbereitung)

$$x_1 = 5, x_2 = 1, x_3 = 6, x_4 = 5, x_5 = 8, x_6 = 3, x_7 = 6$$

$$k = 3 + 6i$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie A_2, A_3 und A_4.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3+9i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -6+3i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$
$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie (mit Begründung) eine Vermutung an, wie A^n (für eine beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$) aussieht.

- Es fällt auf, dass sich die Werte der ersten Spalte $\binom{1}{0}$ nicht verändern. Betrachten wir die komplexen Zahlen in einer Gaußschen Zahlenebene, werden wir feststellen, dass sich diese Werte natürlich auch weiterhin nicht verändern werden und stattdessen entlang von vier Punkten innerhalb eines Kreises sich bewegen werden.
- Der Wert k “rotiert” aller vier Potenzen ($k^n = k^{n+4}$). Auch das lässt sich erklären mit der Rotation entlang eines Kreises innerhalb der Gaußschen Zahlenebene.
- Das Gleiche gilt für für den Wert von Zeile 2, Spalte 2. Hier rotieren die Werte in folgender Reihenfolge durch: $i \to -1 \to -i \to 1$.

Vereinfacht: Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polarform erfolgt durch Multiplikation der Beträge und Addition der Argumente. Beim Potenzieren von k wird der Betrag potenziert und der Winkel vervielfacht. Dadurch “rotiert” k^n in der Gaußschen Ebene entlang eines Kreises.

(c) Bestimmen Sie eine komplexe Zahl $z := x + yi$, so dass $A_3 + zA_2 + iA = 0_{2\times 2}$ gilt.

$$\begin{pmatrix} 1 & -6+3i \\ 0 & -i \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & -3+9i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 & 3+6i \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} z + (1+i) & (-3+9i)z - (12-6i) \\ 0 & -z - (1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z = -1 - i$$

(d)

$$E_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = E$$

$$((1,k)(0,i)) * ((a,b)(c,d)) = ((1,0)(0,1))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + kc & b + kd \\ ic & id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a + kc = 1$
$b + kd = 0$
$ic = 0$
$id = 1$

Dadurch erhalten wir:

$d = \frac{1}{i}$
$c = 0$
$a = a$
$b = -\frac{k}{i}$

$$\underline{B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k}{i} \\ 0 & \frac{1}{i} \end{pmatrix}}$$