Hochschule für Technik,
Wirtschaft und Kultur Leipzig

THEORETISCHE INFORMATIK: BERECHENBARKEIT UND KOMPLEXITÄT

# Lösung zur 11. Übung Aufgabe 5

*Justin Kromlinger*

18. Januar 2021

# 1 Aufgabenstellung 11.5[1]

Beantworten und begründen Sie:

1. Gilt PCP $\in$ RE ?
2. Gilt $\overline{\text{PCP}}$ $\in$ RE ?
3. Gilt $\overline{\text{PCP}}$ $\in$ REC ?

## 2 Lösung

Die Begrifflichkeit ist im letzten Foliensatz[2] definiert – es soll geklärt werden, ob sich die Menge aller lösbaren (1.) sowie nicht lösbaren (2.) Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems (PCP) in der Menge aller rekursiv aufzählbaren Instanzen (Semi-Entscheidbarkeit, RE) befindet und ob sich die Menge aller nicht lösbaren in der Menge der entscheidbaren Instanzen (REC, 3.) befindet.

Im PCP wird eine Instanz als endliche Menge von Paaren $(x_i, y_i)$ endlicher Wörter über einem endlichen Alphabet definiert. Die Instanz gilt als lösbar, wenn es eine geordnete Verkettung von $x_i$ gibt die gleich der Verkettung von $y_i$ derselben Ordnung ist. Da die Paar-Menge endlich ist, kann man mögliche Lösungen (sofern sie existieren) über eine naive Breitensuche finden, am Beispiel aus der Vorlesung: $P = \{(1, 111), (10111, 10), (10, 0)\}$:

- Tiefe von 1, testen von $(1) \Rightarrow (111)$
- ...
- Tiefe von 3, testen von $(1, 10111, 10) \Rightarrow (111, 10, 0)$
- ...
- Tiefe von 4, testen von $(10111, 1, 1, 10) \Rightarrow (10, 111, 111, 0) \rightarrow$ akzeptierender Zustand

---

**Input:** $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in ((\sum^*)^2)^n$
$i \leftarrow 1$;
**while** *true* **do**
  **for** $w \in \{1, \ldots, n\}^i$ **do**
    **if** $x_{w_1} x_{w_2} \ldots x_{w_i} = y_{w_1} y_{w_2} \ldots y_{w_i}$ **then**
      Akzeptiere;
    **end**
  **end**
  $i \leftarrow i + 1$;
**end**

---

Es lässt sich also eine Turingmaschine konstruieren, die für alle lösbaren PCP-Mengen irgendwann einen akzeptierenden Zustand liefern wird. Daraus folgt, dass 1. gilt.

$$PCP \text{ TM-akzeptierbar} \rightarrow PCP \subseteq \mathbb{N}\,(PCP \subseteq X^*) \text{ rekursiv aufzählbar}$$

Da wir in der Vorlesung bereits nachgewiesen haben, dass PCP nicht entscheidbar ist, und PCP $\in$ PE gilt, kann 2. nicht gelten – bei einer entscheidbaren Menge wäre sowohl L als auch $\overline{\mathrm{L}}$ rekursiv aufzählbar.

$$\begin{aligned}
&\text{PCP nicht entscheidbar}\\
&\text{PCP} \subseteq \mathbb{N}\,(\text{PCP} \subseteq X^*) \text{ rekursiv aufzählbar}\\
&\overline{\text{PCP}} \subseteq \mathbb{N}\,(\overline{\text{PCP}} \subseteq X^*) \text{ rekursiv aufzählbar } \lightning \curvearrowright \text{ Gilt nicht}
\end{aligned}$$

Aufgrund Diesen beiden Erkenntnissen gilt auch 3. nicht – $\overline{PCP}$ wäre genau dann entscheidbar, wenn sowohl $\overline{\overline{PCP}} = PCP$ als auch $\overline{PCP}$ rekursiv aufzählbar wären – wenn PCP nicht entscheidbar ist, ist auch $\overline{\text{PCP}}$ nicht entscheidbar.

# Literatur

[1] Prof. Dr. Sibylle Schwarz. 11. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität, Januar 2021. Online verfügbar unter `https://imweb.imn.htwk-leipzig.de/~schwarz/lehre/ws20/tim/serie11.pdf`; abgerufen am 18.01.2021.

[2] Prof. Dr. Sibylle Schwarz. Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität – Folien zu Reduktion und PCP, Januar 2021. Online verfügbar unter `https://imweb.imn.htwk-leipzig.de/~schwarz/lehre/ws20/tim/tim20-hp-pcp.pdf`; abgerufen am 18.01.2021.