
Mathematik für Ingenieure - WS2023/24 Übungsblatt 14

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Über eine Abfüllanlage für Ein-Liter-Tetra Paks sei bekannt, dass die (zufällige) Abfüllmenge X (in ml) verteilt ist mit der Dichte

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0.025 & \text{falls } x \in [980, b] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie b so, dass f tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem zufällig ausgewählten Tetra Pak weniger als ein Liter enthalten ist?
- (c) Welche mittlere Füllmenge kann erwartet werden?
- (d) Bestimmen Sie die Varianz der Abfüllmenge.

Aufgabe 2: In einer Warenlieferung von $N = 100$ Stück befinden sich $M = 4$ defekte. Bei einer Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang $n = 3$ bezeichne X die Anzahl der defekten Stücke.

Berechnen Sie die Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X = m)$ unter der Annahme, dass X einer *Binomialverteilung* $\text{bin}(n, p)$ unterliegt.

Aufgabe 3: Aus einem Lieferposten automatisch hergestellter Kondensatoren werden 100 Stück zufällig herausgegriffen und an ihnen die jeweilige Kapazität gemessen. Ein Kondensator ist unbrauchbar, wenn seine Kapazität nicht in den geforderten Toleranzgrenzen liegt.

Der durchschnittliche, aus Erfahrung bekannte Ausschussprozentsatz betrage 3%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:

- (a) unter den 100 Kondensatoren genau 3 unbrauchbare sind.
- (b) unter den 100 Kondensatoren höchstens 3 unbrauchbare sind.

Hinweis: Überlegen Sie, welche Verteilung der Zufallsvariablen angenommen werden kann.

Aufgabe 4: Gegeben sei eine binomialverteilte Zufallsvariable $X(\omega) \sim \text{bin}(n, p)$.

Zeigen Sie dass aus der Binomialverteilung für den Grenzübergang

$$n \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad p \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad n \cdot p = \lambda \quad (\text{konstant})$$

die Verteilung $X \sim \text{Po}(\lambda)$ mit dem Parameter λ erhalten wird, wobei

$$p_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

annimmt. Diese wird *Poissonverteilung* genannt.

Anleitung: Ersetzen Sie p in der Formel für die Wahrscheinlichkeit von $X(\omega) \sim \text{bin}(n, p)$ und nutzen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$.

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine

- (a) normalverteilte Zufallsvariable
- (b) exponentialverteilte Zufallsvariable

einen Wert kleiner oder gleich ihrem Erwartungswert annimmt?

Aufgabe 6: Es sei $\lambda > 0$ eine beliebige Zahl. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass f die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariable X ist.
- (b) Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F_X .
- (c) Sei hier $\lambda = 2$. Skizzieren Sie den Verlauf von f und F_X . Verdeutlichen Sie in beiden Grafiken die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X \leq 2,5)$. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.
- (d) Wie muss λ gewählt werden, damit $P(X \geq 3) = 0,5$ gilt?

Aufgabe 7: In einem Computerpool befinden sich 20 gleichartige Rechner, die unabhängig voneinander ausfallen können. Die Computer werden alle drei Monate gewartet. Die Ausfallwahrscheinlichkeit für einen Computer innerhalb dieses Zeitraumes beträgt 1%.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im betrachteten Zeitraum kein Rechner ausfällt?
- (b) Wie viele Rechner müssten im Pool wenigstens vorhanden sein, damit bis zur nächsten Wartung mit mindestens 95%-iger Sicherheit stets 20 oder mehr Rechner verfügbar sind?

Aufgabe 8: Die stetige Zufallsvariable X habe die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $a > 0$ eine fest vorgegebene Zahl sei.

- (a) Begründen Sie, dass f tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
- (b) Berechnen Sie $P(X \leq t)$ und $P(X > t)$ für festes $t \in \mathbb{R}$.