Formelübersicht zur Filtration

Durchströmung von Haufwerken

Formel von Darcy

Die Darcy-Gleichung beschreibt den empirischen Zusammenhang zwischen dem Strömungsdruckverlust in einer nicht näher beschriebene Schüttung und der Anströmgeschwindigkeit des Fluids. Ihre Gültigkeit ist auf laminare Durchströmung begrenzt.

$$\frac{d}{dh}p = \frac{1}{k(\varepsilon)} \cdot \eta_F \cdot v_F$$

(Δp Druckverlust, h Höhe der Schüttung, $k(\varepsilon)$ Darcy-Konstante, η_F Viskosität, v_F Leerrohrgeschwindigkeit)

Gleichung von Carman-Kozeny

Ausgehend von der Darcy-Gleichung beschreibt die Carman-Kozeny-Gleichung den Strömungsdruckverlust in einer bekannten Schüttung (laminare Durchströmung):

$$\frac{\Delta p}{h} = K' \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot S_V^{\,2} \cdot \eta_F \cdot v_F$$

K' = f(Schüttgutgeometrie, Porosität)

(Δp Druckverlust, K' Kozeny-Konstante, ε Porosität, S_V volumenspezifische Oberfläche, η_F Viskosität, v_F Leerrohrgeschwindigkeit, h Höhe der Schüttung)

Kozeny-Konstante: $K' = 3.6 \,..\, 5.5$ gute Näherung: $K' = 4.5$

Dimensionslose Darstellung:

Analog anderen Strömungsproblemen lässt sich der Druckverlust in einer Schüttung als Vielfaches des Staudrucks beschreiben. Den Proportionalitätsfaktor nennt man Reibungsbeiwert:

$$\Delta p = \lambda_{Sch} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \quad \text{mit} \quad \lambda_{Sch} = f\left(Re_{Sch}\right)$$

Die Carman-Kozeny-Gleichung ist dann identisch mit:

$$\lambda_{Sch} = \frac{32 \cdot K'}{Re_{Sch}} \quad \text{gültig für:} \quad Re_{Sch} \le 20$$

wobei:

Reibungsbeiwert: $$\lambda_{Sch} = \frac{2 \cdot \Delta p \cdot \varepsilon^2 \cdot d_h}{\rho_F \cdot v_F^{\,2} \cdot h_{Sch}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\Delta p \cdot x'_{ST}}{\rho_F \cdot v_F^{\,2} \cdot h_{Sch}} \cdot \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon}$$

Reynolds-Zahl: $$Re_{Sch} = \frac{\rho_F \cdot v_F \cdot d_h}{\eta_F \cdot \varepsilon} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho_F \cdot v_R \cdot x'_{ST}}{(1-\varepsilon) \cdot \eta_F}$$

hydraulicher Durchmesser: $$d_h = \frac{4 \cdot \varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{S_V}$$

modifiz. Sauterdurchmesser: $$x'_{ST} = \frac{6}{S_V} = \Psi \cdot x_{ST}$$

Nicht-laminare Durchströmung von Haufwerken

Darcy-Gleichung mit Trägheitsterm

Die Darcy-Gleichung gilt nur für schleichende, laminare Durchströmung. In diesem Fall resultiert der Druckverlust aus der viskosen Reibung an der überströmten Schüttgutoberfläche. Mit zunehmendem Volumendurchsatz wird der Druckverlust von Trägheitseffekten bestimmt. Die Darcy-Gleichung muss dann um einen entsprechenden Term erweitert werden:

$$\frac{d}{dh}p = k_1 \cdot \eta_F \cdot v_F + k_2 \cdot \rho_F \cdot v_F^2$$

(Δp Druckverlust, h Höhe der Schüttung, $k_{1/2}$ Konstanten für viskosen bzw. inertialen Widerstand, η_F Viskosität, ρ_F Dichte v_F Leerrohrgeschwindigkeit)

Allgemeines Herangehen

Bei nicht-laminarer Durchströmung wird vorzugsweise auf eine dimensionslose Darstellung des Strömungsdruckverlustes zurückgegriffen:

$$\lambda_{Sch} = \frac{32 \cdot K'}{Re_{Sch}} + \frac{B}{Re_{Sch}^{A}}$$

zum Beispiel:

$$\lambda_{Sch} = \frac{160}{Re_{Sch}} + \frac{16}{Re_{Sch}^{0.25}}$$

Gleichung von Ergun

Für gebrochenes Mahlgut mit enger Partikelgrößenverteilung erhielt Ergun folgende empirische Gleichung:

$$\lambda_{Sch} = \frac{133.3}{Re_{Sch}} + \frac{2.333}{Re_{Sch}^{0.25}}$$

entspricht im laminarem Bereich der Carman-Kozeny-Gleichung mit K' = 4.2

Die Ergun-Gleichung wird jedoch häufig mit einer leicht anderen Definition für den Widerstandsbeiwert wie auch für die Reynolds-Zahl wiedergegeben:

$$\xi = \frac{150}{Re'_{Sch}} + 1.75$$

gültig für: $3 \le Re'_{Sch} \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \le 10^4$

wobei:

modif. Reibungsbeiwert:

$$\xi = \frac{3}{4} \cdot \lambda_{Sch} = \frac{\Delta p \cdot x'_{ST}}{\rho_F \cdot v_F^2 \cdot h_{Sch}} \cdot \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon}$$

modif. Reynolds-Zahl:

$$Re'_{Sch} = \frac{3}{2} \cdot Re_{Sch} = \frac{\rho_F \cdot v_F \cdot x'_{ST}}{(1-\varepsilon) \cdot \eta_F}$$

Statische Oberflächenfiltration (Kuchenfiltration)

Bei Kuchenfiltration resultiert der Druckverlust aus der Durchströmung des - stetig wachsenden - Filterkuchens und der Durchströmung des Filtermittels. Es gilt folgender Ansatz:

$$\Delta p = \eta_F \cdot \left(r_K \cdot h_K + R_M\right) \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{d}{dt} V_F$$

(Δp Druckverlust, η_F Viskosität, V_F Filtratvolumen, A Filterfläche, h_K Höhe des Filterkuchens, r_K spezif. Filterkuchenwiderstand, R_M Filtermittelwiderstand)

Allgemeine Filtergleichung

Die Filterkuchenhöhe h_K wächst linear mit dem Filtratvolumen V_F. Daraus folgt die allg. Filtergleichung:

$$\Delta p = \eta_F \cdot \left(r_K \cdot K_S \cdot \frac{V_F}{A} + R_M\right) \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{d}{dt} V_F \quad \text{mit} \qquad K_S = \frac{V_K}{V_F} = \frac{h_K \cdot A}{V_F} = \frac{c_{VS} - c_{VF}}{1 - \varepsilon - c_{VS}}$$

(K_S Kuchenbildungskonstante, ε Kuchenporosität, c_{VS}/c_{VF} Feststoffvolumenanteil in der Suspension/im Filtrat, i.d.R. gilt: $c_{VF}=0$)

spezif. Kuchenwiderst. (nach Carmen-Kozeny)

$$r_K = \frac{\Delta p_K}{\eta_F \cdot v_F \cdot h_K} = K' \cdot \frac{\left(1 - \varepsilon_K\right)^2}{\varepsilon_K^{\,3}} \cdot S_V^{\,2}$$

Betrieb bei konstantem Druck (Δp = konst.)

Filtrationsdauer:

$$t_F = \frac{\eta_F \cdot r_K \cdot K_S}{2 \cdot A^2 \cdot \Delta p} \cdot V_F^{\,2} + \frac{\eta_F \cdot R_M}{A \cdot \Delta p} \cdot V_F = \frac{\eta_F}{2 \cdot \Delta p \cdot A^2} \cdot \left(r_K \cdot K_S \cdot V_F^{\,2} + 2 \cdot R_M \cdot A \cdot V_F\right)$$

Filtratvolumen:

$$V_F = \sqrt{\left(\frac{R_M \cdot A}{r_K \cdot K_S}\right)^2 + \frac{2 \cdot \Delta p \cdot A^2}{\eta_F \cdot r_K \cdot K_S} \cdot t} - \frac{R_M \cdot A}{r_K \cdot K_S} = \frac{R_M \cdot A}{r_K \cdot K_S} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2 \cdot r_K \cdot K_S \cdot \Delta p}{\eta_F \cdot R_M^{\,2}} \cdot t} - 1\right)$$

Filtratdurchsatz:

$$\frac{d}{dt} V_F = \frac{\Delta p \cdot A}{\sqrt{\left(\eta_F \cdot R_M\right)^2 + 2 \cdot \eta_F \cdot r_K \cdot K_S \cdot \Delta p \cdot t}} = \frac{\Delta p \cdot A}{\eta_F \cdot R_M} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2 \cdot r_K \cdot K_S \cdot \Delta p}{\eta_F \cdot R_M^{\,2}} \cdot t}\right)^{-1}$$

Filtergerade für Δp = konst.:

$$\frac{t}{V_F} = \frac{\eta_F \cdot r_K \cdot K_S}{2 \cdot A^2 \cdot \Delta p} \cdot V_F + \frac{\eta_F \cdot R_M}{A \cdot \Delta p}$$

Betrieb bei konstantem Filtratdurchsatz (VS = dV_F/dt = konst.)

Filtrationsdauer:

$$t_F = \frac{\Delta p_{max} \cdot A^2 - \eta_F \cdot R_M \cdot VS \cdot A}{\eta_F \cdot r_K \cdot K_S \cdot VS^2}$$

Filtratvolumen:

$$V_F = VS \cdot t$$

Druckverlust:

$$\Delta p = \eta_F \cdot r_K \cdot K_S \cdot \left(\frac{VS}{A}\right)^2 \cdot t + \eta_F \cdot R_M \cdot \frac{VS}{A}$$

Statische Oberflächenfiltration mit kompressiblen Filterkuchen

Allgemeine Filtergleichung

Für kompressible FK ändert sich die allgemeine Filtergleichung der statischen OF-Filtration nur unwesentlich:

$$\Delta p = \eta_F \cdot \left(r_{K.av} \cdot h_K + R_M\right) \cdot \frac{1}{A} \frac{d}{dt} V_F \qquad \text{mit} \qquad h_K = \frac{V_F}{A} \cdot K_S\left(\varepsilon_{av}, c_{VS}\right)$$

(Δp Druckverlust, V_F Filtratvolumen, A Filterfläche, $r_{K.av}$ mittlerer spezif. FK-Widerstand, R_M FM-Widerstand, K_S Kuchenbildungskonstante, ε_{av} mittlere Kuchenporosität, c_{VS} Feststoffvolumenanteil, η_F Viskosität)

Materialverhalten

Im kompressiblen FK variieren spezifischer FK-Widerstand r_K und Porosität ε über der FK-Höhe. I. d. R. geht man davon aus, dass diese Größen nur vom örtlichen Kompressionsdruck (Gerüstdruck) p_K abhängen. Die empirisch ermittelte Abhängigkeit lässt sich häufig mit einfachen Beziehungen beschreiben:

Ansatz von Grace: $\quad r_K = K_r \, p_K^{\,n_r} \qquad 1 - \varepsilon = K_\varepsilon \cdot p_K^{\,n_\varepsilon}$

Ansatz von Alles: $\quad r_{K.av} = r_{K.0} \cdot \left(1 + \frac{\Delta p_K}{\Delta p_0}\right)^N \qquad 1 - \varepsilon_{av} = \left(1 - \varepsilon_0\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta p_K}{\Delta p_0}\right)^G$

Ausschlaggebend für die Wahl eines Ansatzes ist die Verfügbarkeit zuverlässiger Modellparameter;
im Folgenden wird mit einem modifizierten Ansatz von Grace gearbeitet:

modifiz.Ansatz nach Grace: $\quad r_K = K_r \cdot \Delta P_K^{\,n_r} \qquad 1 - \varepsilon = K_\varepsilon \cdot \Delta P_K^{\,n_\varepsilon} \qquad$ mit $\qquad \Delta P_K = \frac{\Delta p_K}{1\ \mathrm{Pa}}$

Betrieb bei konstantem Druck (Δp = konst.)

Druckabfall über FK: $\quad \Delta p_K = \Delta p - \eta_F \cdot R_M \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{d}{dt} V_F$

$$\Delta p_K = \eta_F \cdot r_{K.av}\left(\Delta p_K\right) \cdot K_S\left(\varepsilon_{av}\left(\Delta p_K\right)\right) \cdot \frac{V_F}{A^2} \cdot \frac{d}{dt} V_F$$

(einfache numerische Lösungen existieren nur, wenn der Druckabfall über dem FM vernachlässigt wird)

Lösungen mit Ansatz nach Grace

gemittelte Größen: $\quad r_{K.av} = K_r \cdot \left(1 - n_r\right) \cdot \Delta P_K^{\,n_r} \qquad 1 - \varepsilon_{av} = K_\varepsilon \cdot \frac{1 - n_r}{1 - n_r + n_\varepsilon} \cdot \Delta P_K^{\,n_\varepsilon}$

Filtrationsdauer (für R_M = 0): $\quad t_F = \frac{\eta_F \cdot r_{K.av} \cdot K_S}{2 \cdot \Delta p \cdot A^2} \cdot V_F^{\,2} = \frac{\eta_F \cdot V_F^{\,2}}{2 \cdot A^2} \cdot K_r \cdot \left(1 - n_r\right) \cdot \Delta P_K^{\,n_r - 1} \cdot K_S\left(\varepsilon_{av}\right)$

Filtrationsvolumen (für R_M = 0): $\quad V_F = \sqrt{\frac{2 \cdot A^2 \cdot t \cdot \Delta p}{\eta \cdot r_{K.av} \cdot K_S\left(\varepsilon_{av}\right)}}$

Filtratdurchsatz (für R_M = 0): $\quad \frac{d}{dt} V_F = \sqrt{\frac{A^2 \cdot \Delta p}{2 \cdot \eta \cdot r_{K.av} \cdot K_S\left(\varepsilon_{av}\right) \cdot t}}$

Betrieb bei konstantem Filtratdurchsatz (VS = dV/dt = konst.)

Druckabfall über FK: $$\Delta p_K = \eta_F \cdot r_{K.av}(\Delta p_K) \cdot K_S(\varepsilon_{av}(\Delta p_K)) \cdot \left(\frac{VS}{A}\right)^2 \cdot t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta p_K}{r_{Kav}(\Delta p_K) \cdot K_S(\varepsilon_{av}(\Delta p_K))} = \eta_F \cdot \left(\frac{VS}{A}\right)^2 \cdot t$$

Lösung mit Ansatz nach Grace und für Näherung der Kuchenbildungskonstante

gemittelte Größen: $$r_{K.av} = K_r \cdot (1-n_r) \cdot \Delta P_K^{\,n_r} \qquad 1-\varepsilon_{av} = K_\varepsilon \cdot \frac{1-n_r}{1-n_r+n_\varepsilon} \cdot \Delta P_K^{\,n_\varepsilon}$$

Filtratvolumen V_F: $$(1-\varepsilon_{av}) \cdot \frac{\eta \cdot K_S}{A^2} \cdot V_F \cdot \frac{d}{dt} V_F = \frac{K_\varepsilon}{K_r} \cdot \frac{\Delta p_K^{\,1-n_r+n_\varepsilon}}{(1-n_r+n_\varepsilon)}$$

Näherung für K_S: $$K_S = \frac{c_{VS}}{(1-\varepsilon_{av}) \cdot (1-c_{VS})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\eta}{A^2} \cdot V_F \cdot \frac{d}{dt} V_F = \eta \cdot \left(\frac{VS}{A}\right)^2 \cdot t = \frac{K_\varepsilon}{K_r} \cdot \frac{\Delta P_K^{\,1-n_r+n_\varepsilon}}{(1-n_r+n_\varepsilon)} \cdot \frac{1-c_{VS}}{c_{VS}}$$

Filtrationsdauer (für $R_M = 0$): $$t_F = \frac{K_\varepsilon}{K_r} \cdot \frac{\Delta P_K^{\,1-n_r+n_\varepsilon}}{(1-n_r+n_\varepsilon)} \cdot \frac{1-c_{VS}}{c_{VS}} \cdot \frac{A^2}{\eta \cdot VS^2}$$

Filtratvolumen (für $R_M = 0$): $$V_F = VS \cdot t$$

Druckverlust (für $R_M = 0$): $$\Delta p = 1\ \mathrm{Pa} \cdot \sqrt[1-n_r+n_\varepsilon]{\frac{K_r}{K_\varepsilon} \cdot (1-n_r+n_\varepsilon) \cdot \frac{c_{VS}}{1-c_{VS}} \cdot \eta_F \cdot \left(\frac{VS}{A}\right)^2 \cdot t}$$

Rechnen mit massenspezifischem Filterkuchenwiderstand

massenspezif. FK-Widerstand: $\alpha_m = \frac{r_K}{(1-\varepsilon) \cdot \rho_S}$ wobei $\alpha_m \cdot \frac{m_K}{A} = r_K \cdot \frac{V_K}{A}$

Den massenspezifischen FK-Widerstand benutzt man zusammen mit einer modifizierten Kuchenbildungskonstante K'_S:

$$\Delta p = \eta_F \cdot \left(\alpha_{m.av} \cdot K'_S \cdot \frac{V}{A} + R_M\right) \cdot \frac{1}{A} \frac{d}{dt} V \qquad \text{mit} \qquad K'_S = K_S \cdot (1-\varepsilon) \cdot \rho_S$$

Für viele Anwendungsfälle gilt dann die Näherung: $K'_S = \rho_S \cdot \frac{c_{VS}}{1-c_{VS}}$ (vgl. 1. Näherung für K_S)

Das heißt, die modifizierte Kuchenbildungskonstante K'_S ist dann unabhängig von der Porosität ε des Filterkuchens, womit die Berechnungen für kompressible Filterkuchen vereinfacht werden.
Beachte: Im Handfilterversuch wird zunächst nur das Produkt aus spezifischen Filterkuchenwiderstand und Kuchenbildungskonstante $r_K \cdot K_S = \alpha_m \cdot K'_S$ ermittelt.