Johannes Krause
Matrikel-Nr.: 576644
Übungsgruppe: Freitag

Aufgabe 1

(a)

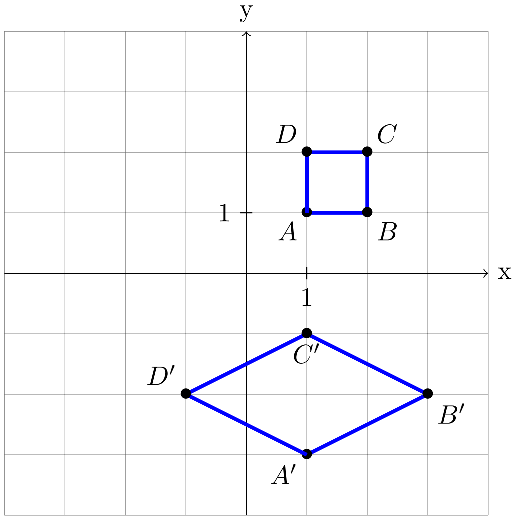
$A = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

In homogene Koordinaten:

$A_h = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $B_h = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $C_h = \begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ $D_h = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix}2 & -2 & 0 & 1\\1 & 1 & 0 & -5\\0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$A'_h = M \times A = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$ $B'_h = M \times B = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $C'_h = M \times C = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $D'_h = M \times D = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$



(b)

Koordinatenursprung $O_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einheitsvektor $e_{1h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

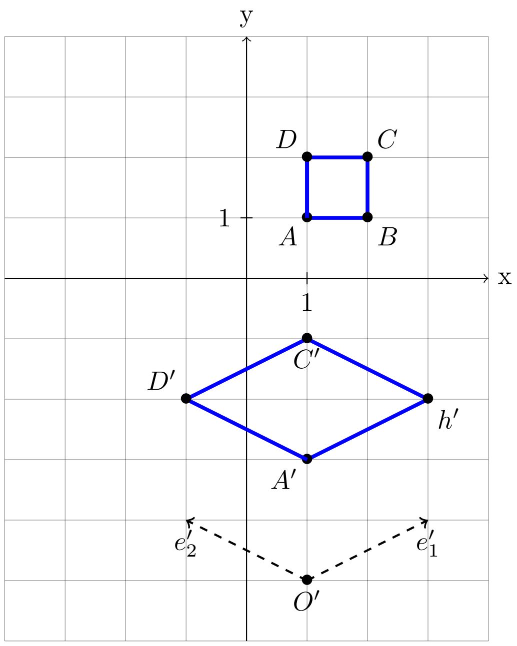
Einheitsvektor $e_{2h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Einheitsvektoren mit $w = 0$, da es sich um Richtungen handelt.

$O'_h = M \times O_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e'_{1h} = M \times e_{1h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e'_{2h} = M \times e_{2h} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Aufgabe 2

(a)

1. Positive Rotation um 90° Grad um die z-Achse
2. Skalierung um Faktor (2, 1, 1)
3. Translation um (3, -1, 0)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M = M_3 M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$M \times M^{-1} = I \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$P_h = M^{-1} P'_h \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow P = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

M_a := Transformationsmatrix zur Transformation des Koordinatenursprungs und des Koordinatensystems mit $z' = z$

M_a^{-1} := Gesuchte Matrix zur Transformation von Punktkoordinaten vom Standard-KOS zu K

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass $M_a e_{3h} = e_{3h} \rightarrow z' = z$

$$M_a^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_h' = M_a^{-1} P_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow P' = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit Blick auf die Grafik in der Aufgabenstellung lässt sich schnell feststellen, dass das Ergebnis stimmt.