

LAG N4.2 Hausaufgabe

Josua Kowalzik

11. November 2021

1 Aufgabenstellung

Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen \mathbb{R} -Vektorräume sind:

- (a) $\{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist injektiv}\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- (b) $\{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists x_0 \in \mathbb{R}: f(x_0) = 0\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- (c) $\{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(2) = 0\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Hinweis: $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bezeichnet die Menge aller Abbildungen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2 Lösung

- (a) $U_1 := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist injektiv}\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

U_1 ist kein UVR von $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, da $0_V \notin U_1$, da $0_V = "f_0(x) = 0"$ und $f_0(x) = 0$ nicht injektiv, z.B. $f_0(0) = 0 = f_0(1)$.

- (b) $U_2 := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists x_0 \in \mathbb{R}: f(x_0) = 0\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

U_2 ist kein UVR von $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, da U_2 nicht abgeschlossen bzgl. $+$ ist:

Seien beispielsweise $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+1)^2$ und $h(x) = (f+g)(x)$, so gilt $f(x), g(x) \in U_2$ aber $h(x) \notin U_2$:

$$\textit{Beweis. } h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + (x+1)^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 + x + \frac{1}{2})$$

Einsetzen in die Diskriminante der pq-Formel ergibt:

$$(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$h(x)$ hat also keine Nullstellen $\Rightarrow h(x) \notin U_2$. □

- (c) $U_3 := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(2) = 0\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. $0_V \in U_3$ da für $f_0(x) = 0$ auch $f_0(2) = 0$.

¹ $f(0) = 0, g(-1) = 0$

2. Seien $f(x), g(x) \in U_3$ und $h(x) = (f + g)(x)$, so gilt $h(2) = (f + g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 0 = 0$. Also gilt $h(x) \in U_3$.
 U_3 ist also abgeschlossen bzgl $+$.
 3. Sei $f(x) \in U_3$ und $k \in \mathbb{R}$ so gilt: $k \cdot f(2) = k \cdot 0 = 0$ und somit $k \cdot f(x) \in U_3$.
 U_3 ist also abgeschlossen bzgl der Skalarmultiplikation.
- $\Rightarrow U_3$ ist also ein Untervektorraum von $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. \square