LAG N2.1 Hausaufgabe

Josua Kowalzik

25. Oktober 2021

1 Aufgabe (a)

1.1 Aufgabenstellung (a)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

Berechnen Sie A^2 und A^3. Geben Sie (mit Begründung) eine Vermutung an, wie A^n (für eine beliebige natürliche Zahl n) aussehen könnte.

1.2 Lösung (a)

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \\
A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & ni \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Beweis. durch vollständige Induktion. Induktionsanfang siehe oben. Induktionsschritt:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & ni \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

2 Aufgabe (b)

2.1 Aufgabenstellung (b)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, y, so dass $A^3 + xA^2 + yA = 0_{2\times 2}$ gilt.

2.2 Lösung (b)

$$
\begin{aligned}
& A^3 + xA^2 + yA = 0_{2\times 2} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{2\times 2} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1+x+y & 3i+2ix+iy \\ 0 & 1+x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich zwei Gleichungen, nämlich:

$$1 + x + y = 0 \tag{1}$$

$$3i + 2ix + iy = 0 \tag{2}$$

Durch geschicktes Umformen und Einsetzen erhält man $x = -2$ und $y = 1$.[1]

3 Aufgabe (c)

3.1 Aufgabenstellung (c)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

Finden Sie eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, so dass $A \cdot B = E_2$, also gleich der Einheitsmatrix in $\mathbb{C}^{2\times 2}$, ist.

3.2 Lösung (c)

$$
\begin{aligned}
& A \cdot B = E_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} b_{11} + ib_{21} & b_{12} + ib_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich folgendes LGS mit vier Gleichungen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ [2]

Daraus ergibt sich durch das Eliminationsverfahren nach GAUSS / JORDAN:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Die gesuchte Matrix lautet also $B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[1] Ich hoffe Sie trauen mir zu, dieses simple Gleichungssystem zu lösen.

[2] Die Spalten der Reihe nach: b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}.