

# Strömungsprobleme der Mechanische Verfahrenstechnik

## *Folien zur Vorlesung*

NUR ZUM PERSÖNLICHEN GEBRAUCH!

PD Dr.-Ing. habil. Frank Babick, 1. April 2022

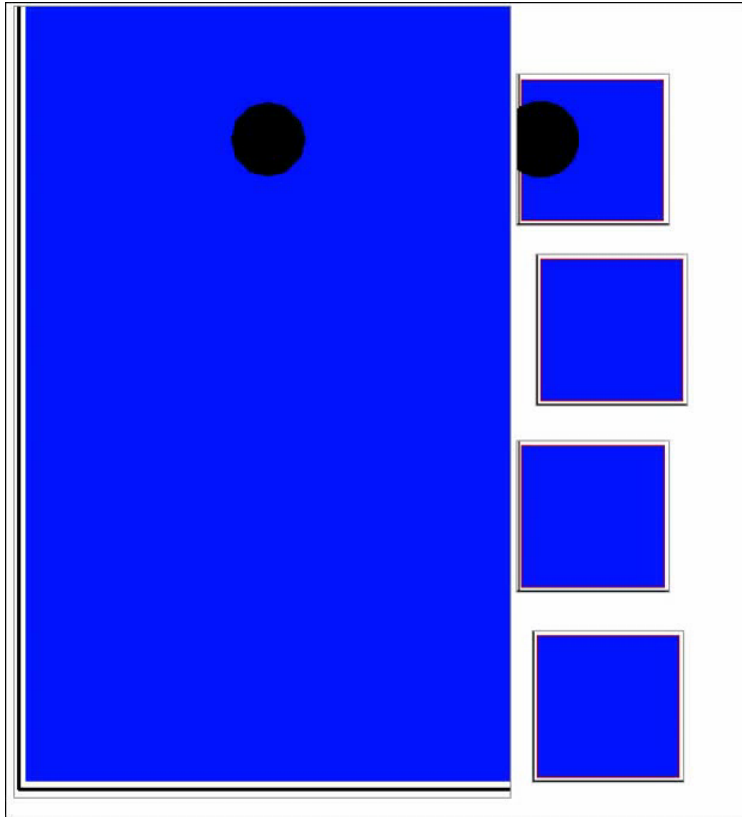
## 2.4 Einzelpartikelbewegung

*- Instationäre, schleichende Umströmung -*

# Instationäre, schleichende Kugelumströmung

- Annahmen:  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$        $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \neq 0$        $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$        $\rho \cdot \mathbf{f} = 0$
- Navier-Stokes-Gl.:  $\rho \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \cdot \Delta \mathbf{v}$
- Randbedingungen:  $\mathbf{v}(r = a) = \mathbf{u}_p$        $\mathbf{v}(r \rightarrow \infty) = \mathbf{v}^\infty$        $U = |\mathbf{v}^\infty - \mathbf{u}_p|$
  
- Unterschied zu stationärem Fall:
  - aus Sicht des Partikels: kein Ausgleich der von Außen wirkenden Kräfte
  - aus Sicht des Fluids: instationärer Krafteintrag durch das Partikel
  - für externen Beobachter:
    - Trägheitsterme für Partikel und Fluid
    - Übertragung der Partikelbewegung auf das Fluid erfolgt in endlichen Zeiträumen  
→ das Strömungsfeld zum Zeitpunkt  $t$  ist abh. von Partikelbewegung vor  $t$

# Beispiel: Anfang & Ende der Sedimentation



- Sedimentation einer Kugel
  - aus Ruhe bis zur Ablagerung
  - links: Simulation (lattice-Boltzmann)
  - rechts: exp. Daten (PIV)
- Beachten Sie die Zeitdauer bis zur Ausbildung eines stationären Geschwindigkeitsfeldes zu Beginn des Prozesses und die Zeitdauer bis zum Abklingen konvektiver Strömungen nach dem Auftreffen der Kugel auf dem Boden.

A. ten Cate & K. Nieuwstad, University of Alberta

[https://sites.ualberta.ca/~jos/moviegallery/sedimenting\\_sphere\\_exp\\_lb.avi](https://sites.ualberta.ca/~jos/moviegallery/sedimenting_sphere_exp_lb.avi)

# Basset-Bousinesq-Oseen-Gleichung

Bewegungsgleichung für eine Kugel bei schleichender, instationärer Strömung

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = 6\pi\eta a \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} + \frac{1}{2} \rho V_p \frac{d\mathbf{v}_{\text{rel}}}{dt} - V_p \nabla p + 6\pi\eta a \sqrt{\frac{a^2}{\pi\nu}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{rel}}}{\partial \tau} d\tau + \sum \mathbf{F}_{\ddot{a}}$$

Trägheit = viskoser Widerstand + inertialer Widerstand + Druckkraft + Basset-Kraft (Gedächtniskraft)  
+ äußere Kräfte (z.B. Schwerkraft)

auch das Fluid ist träge und muss beschleunigt/abgebremst werden, die Ausbildung eines Strömungsfeldes um das Partikel benötigt Zeit  
→ aktuelle Strömung enthält Störungen („Wirbel“), die von vergangener Partikelbewegung verursacht wurden

Vereinfachung für ruhendes Fluid:

$$\left(\rho_p V_p + \frac{1}{2} \rho V_p\right) \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = -6\pi\eta a \cdot \mathbf{u}_p - \rho V_p \mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{Basset}} + \sum \mathbf{F}_{\ddot{a}}$$

„added mass“ =  
mitbewegte Fluidmasse

Strömungswiderstand bzw.  
Schleppkraft

hydrostat. Druckkraft  
= Auftriebskraft

Gedächtniskraft  $\sim a^2 \cdot \sqrt{\eta\rho}$   
→ relevant für große Partikel und Flüssigkeiten

z.B. Schwerkraft  $\mathbf{F}_G = \rho_p V_p \mathbf{g}$

# Viskoses Abbremsen eines bewegten Teilchens

- vereinfachte Bewegungsgleichung:

$$\rho'_P V_P \frac{d\mathbf{u}_P}{dt} = -\mathbf{u}_P / \mu_{hd} \quad \rho'_P = \rho_P + \frac{1}{2}\rho$$

- Lösung:  $\mathbf{u}_P(t) = \mathbf{u}_P(0) \cdot e^{-t/\tau}$

- Relaxationszeit & Bremsweg

$$\tau = \mu_{hd} \rho'_P V_P \quad l_{st} = u_{P,0} \cdot \tau$$

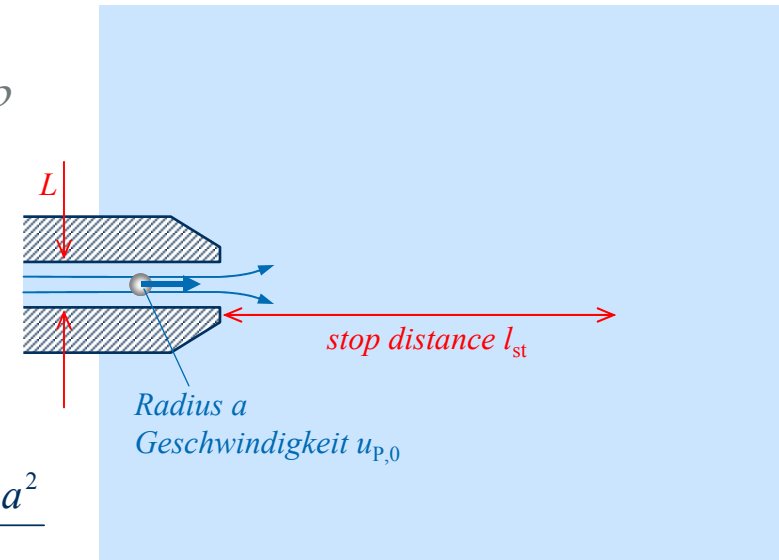
- Stokes-Zahl

$$\text{Def.: } Stk = \frac{l_{st}}{L} = \frac{u_{P,0} \tau}{L} = \frac{u_{P,0} \mu_{hd} \rho'_P V_P}{L} = \frac{2u_{P,0} \rho'_P a^2}{9\eta L}$$

$L$  = charakter. Abmessung der Gesamtströmung

$$\text{Interpretation: } Stk = \frac{\text{Trägheit des Partikels}}{\text{Reibung am Partikel}}$$

$$\text{zur Erinnerung: } Re = \frac{\text{Trägheit der Fluidmoleküle}}{\text{Reibung im Fluid}}$$



# Trägheitsabscheidung von Partikeln

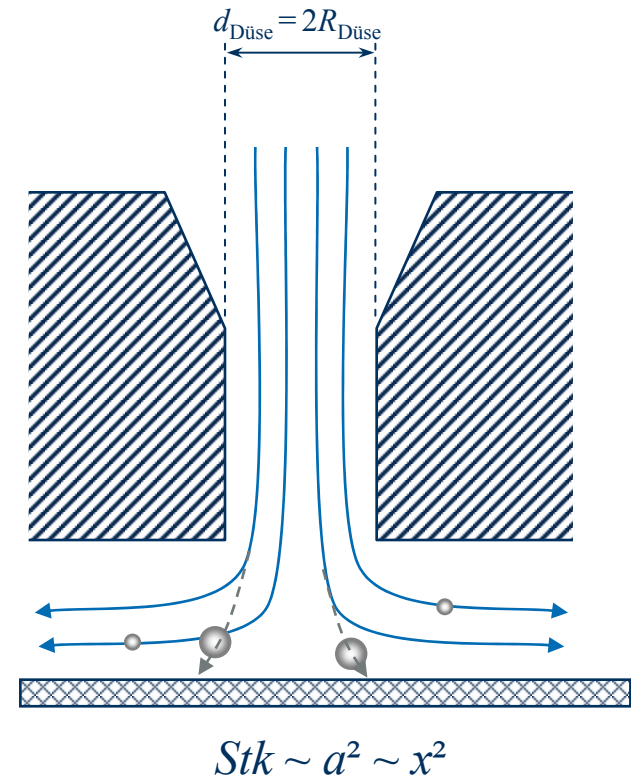
- Prinzip:
  - erzwungene Richtungsänderung der partikelhaltigen Fluidströmung
- Wirkung:
  - $Stk \ll 1 \rightarrow$  Partikelträgheit vernachlässigbar, Partikel folgen Stromlinien
  - $Stk \gg 1 \rightarrow$  Partikelträgheit dominiert, Partikel „fliegen“ geradeaus

$$Stk = \frac{l_{st}}{R_{Düse}} = \frac{2u_{p,0}\rho'_p a^2}{9\eta R_{Düse}} = \frac{u_{p,0}\rho'_p x^2}{9\eta d_{Düse}}$$

$a$  = Partikelradius,  $x$  = Partikeldurchmesser

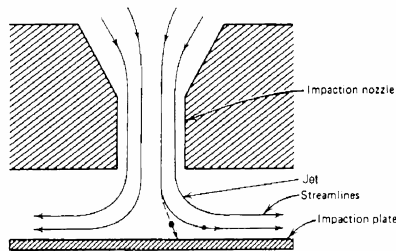
$R_{Düse}$  = Düsenradius,  $d_{Düse}$  = Partikeldurchmesser

$u_{p,0}$  = Gas+Partikelgeschwindigkeit am Düsenaustritt



# Trennkurven der Trägheitsabscheidung

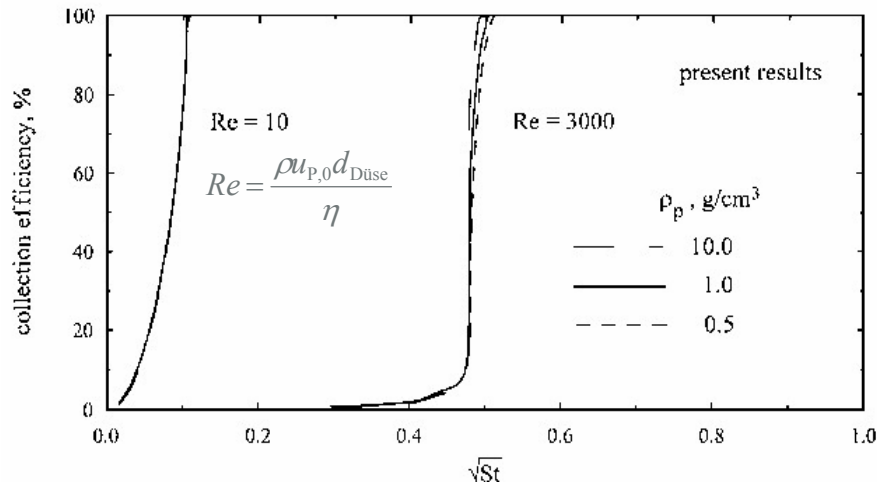
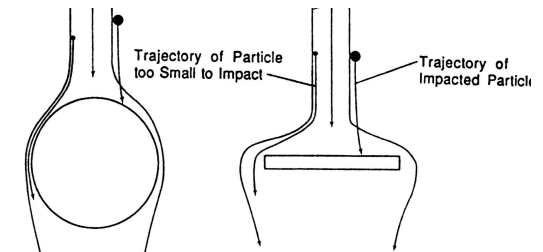
für Impaktorplatten



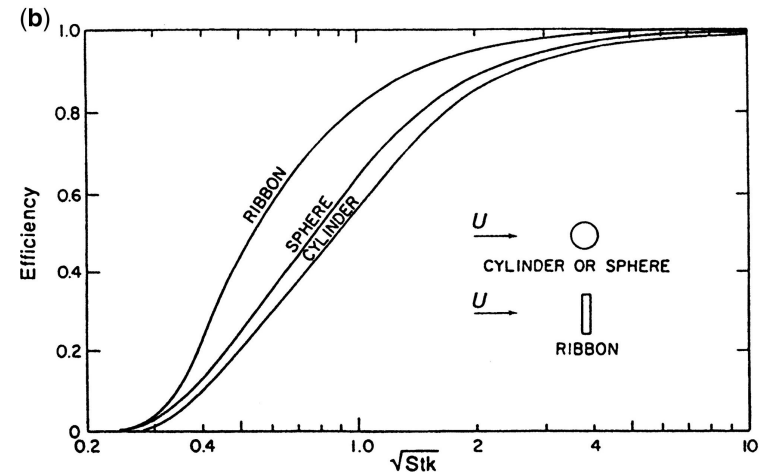
$$Stk = \frac{u_{P,0} \rho'_P x^2}{9 \eta d_{Düse}}$$

für angeströmte Partikel, Fasern, etc.:

$$Stk = \frac{u_{P,0} \rho'_P x^2}{9 \eta d_{Körper}}$$



Huang & Tsai, *Aerosol Sci. Technol.*, 36(2):714-720, 2002; doi:10.1080/02786820290038410



Kulkarni et al., *Aerosol measurement*, Wiley, 2011; doi: 10.1002/9781118001684; fig. 8.7

# Relaxationszeit und Sinkgeschwindigkeit

- allgemein

- Sinkgeschwindigkeit:  $v_{\text{Stokes}} = \mu_{\text{hd}} \cdot g \Delta \rho V_{\text{P}} = \frac{2g\Delta\rho}{9\eta} a^2 = \frac{g\Delta\rho}{18\eta} x^2$

- Relaxationszeit:  $\tau = \mu_{\text{hd}} \rho'_{\text{P}} V_{\text{P}} = \frac{2\rho'_{\text{P}} a^2}{9\eta} = \frac{\rho'_{\text{P}} x^2}{18\eta}$

- in Gasen für  $Kn = 0$ :

- Sinkgeschwindigkeit  $v_{\text{Stokes}} = \frac{2g\rho_{\text{P}} a^2}{9\eta} = \frac{g\rho_{\text{P}} x^2}{18\eta}$
  - Relaxationszeit  $\tau = \frac{2\rho_{\text{P}} a^2}{9\eta} = \frac{\rho_{\text{P}} x^2}{18\eta}$

}  $\tau = v_{\text{Stokes}} / g$

→ Aerosolpartikel mit gleicher Sinkgeschwindigkeit gleichen sich auch in Bezug auf die Relaxationszeit.

# Instationäre Partikelbewegung bei moderaten $Re_p$

- Widerstandsbeiwert:

- Oseen (1913):  $c_W = c_{W,Stokes} \cdot \left(1 + \frac{3}{16} Re_p\right)$  für Kugeln und  $Re_p < 10$

- verallgemeinert:  $c_W = c_{W,Stokes} \cdot \left(1 + a \cdot Re_p^b\right) = c_{W,Stokes} \cdot f_{nonSt}(Re_p)$

- z.B. mit  $a = \frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}$  für  $Re_p < 800$ , Cheng et al. (1990)

- vereinfachte Bewegungsgleichung

$$\frac{du_p}{dt} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\rho}{\rho'_p} \cdot \frac{c_W(Re_p)}{C_C(Kn)} \cdot \frac{(u_p - v_F)^2}{x} = -18 \cdot \frac{\eta(u_p - v_F)}{\rho'_p x^2 C_C(Kn)} \cdot f_{nonSt}(Re_p)$$

- Bremsweg

- Berechnung  $l_{st} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho'_p x}{\rho} \cdot C_C(Kn) \cdot \int_0^{Re_{p,0}} \frac{1}{\xi \cdot c_W(\xi)} d\xi$  Israel & Rosner (1982)

- Lösung

$$l_{st} = l_{st,Stokes} \cdot C_{nonSt}(Re_{p,0})$$

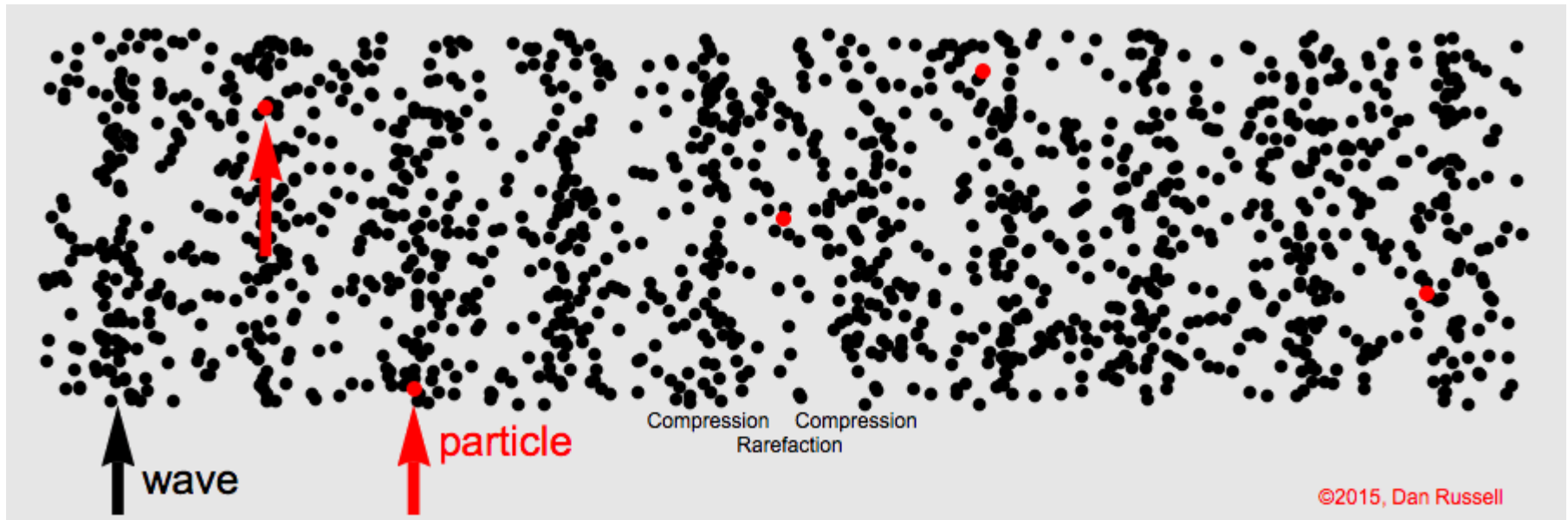
$$C_{nonSt}(Re_{p,0}) = \frac{18}{Re_{p,0}} \cdot \left( Re_{p,0}^{\frac{1}{3}} - \sqrt{6} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{6}} Re_{p,0}^{\frac{1}{3}}\right) \right) \quad \text{für } a = \frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}$$

- Relaxationszeit:

$$\tau = \tau_{Stokes} \cdot C_{nonSt}(Re_{p,0})$$

# Oszillatorische Partikelbewegung

- mögliche Ursache
  - oszillatorische Feldkräfte (z.B. in Wechsellspannungsfeldern)
  - oszillatorische Bewegung des umgebenden Fluids (z.B. Schallfelder, Rheometer)
- Was passiert?



# Oszillatorische Partikelbewegung

- mögliche Ursache
  - oszillatorische Feldkräfte (z.B. in Wechselfeldern)
  - oszillatorische Bewegung des umgebenden Fluids (z.B. Schallfelder, Rheometer)
- Was passiert?
  - Kopplung zwischen oszillatorischer Partikel- und Fluidbewegung infolge von Strömungskräften
  - Partikel- und Fluidoszillation unterscheiden sich in Bezug auf Amplitude und Phase sobald ihre Trägheitseigenschaften differieren (d.h. für  $\Delta\rho \neq 0$ )
  - anders als bei stationärer Relativbewegung klingt die von dem Partikel induzierte Störung der Fluidbewegung mit exponentiellem Partikelabstand ab

- Berechnung:

- für harmonische Oszillation:  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$   $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -i\omega\mathbf{v}$

- Widerstandskraft 
$$\mathbf{F}_W = 6\pi\eta a \left(1 + \frac{a}{\delta_{\text{vis}}}\right) \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} + \frac{1}{2}\rho V_P \left(1 + \frac{9}{2} \frac{\delta_{\text{vis}}}{a}\right) \cdot \frac{d\mathbf{v}_{\text{rel}}}{dt}$$

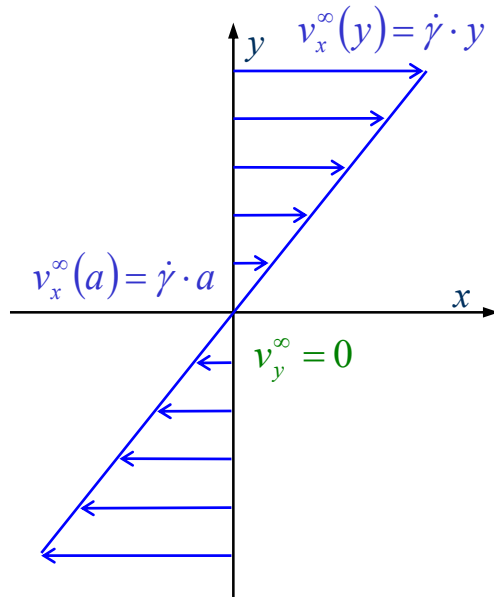
= viskoser Widerstand + inertialer Widerstand

mit  $\delta_{\text{vis}} = \sqrt{2\nu/\omega}$ , Maßstab für das exponentielle Abklingen

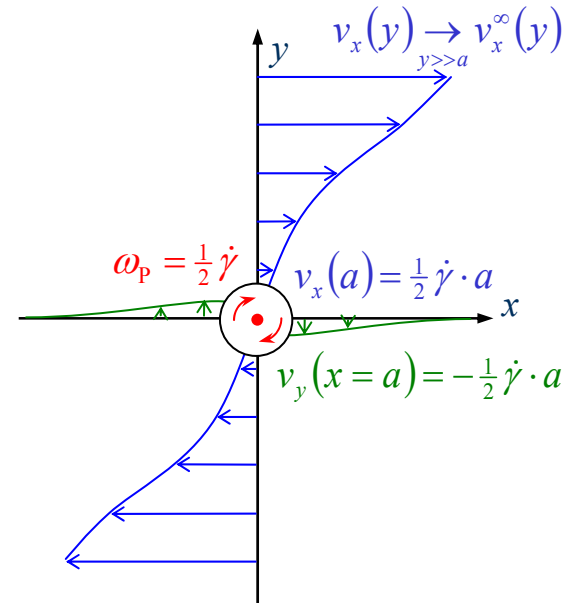
## 2.5 Einzelpartikelbewegung - stationäre Scherströmung -

# Partikel im idealen Scherfeld

ideales Scherfeld (2-dimensional)



Kugel im idealen Scherfeld

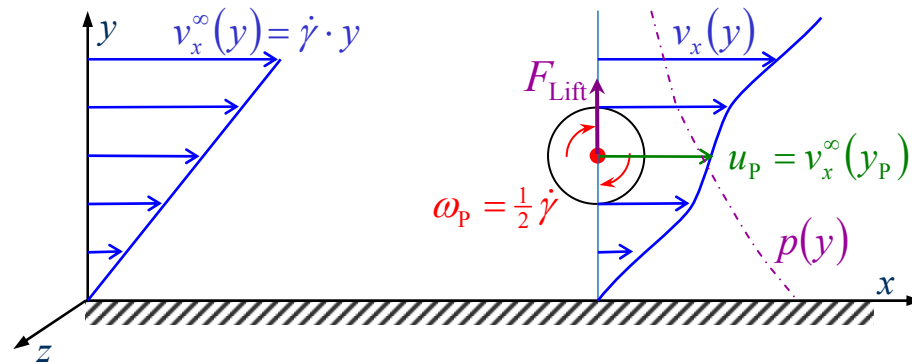


- ideales Scherfeld verursacht Partikelrotation, keine Translation
- Scherfeld wird durch Partikel lokal verzerrt

# Partikel im idealen Scherfeld

- Beschreibung
  - Strömung parallel zu x-z-Ebene:  $v_x^\infty = \dot{\gamma} \cdot y$
  - allgemeiner Fall:  $v_i^\infty = \dot{\gamma}_{ij} \cdot x_j$
- Randbedingungen:
  - fixierte Kugel:  $\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{v}(r = a) = \mathbf{u}_p$
  - freie Kugel:  $v_x(r = a, z = 0) = u_{p,x} + \omega_p \cdot a \cdot \sin \varphi$   
bzw.  $\mathbf{v}(r = a) = \mathbf{u}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}|_a$
- Was passiert mit den Partikel im Koordinatenursprung ( $\mathbf{v}^\infty = \mathbf{0}$ )?
  - keine Translation
  - feste Kugel: Netto-Drehmoment  $> 0$
  - freie Kugel:
    - Netto-Drehmoment = 0, aber Rotation mit  $\omega_p = \frac{1}{2} \dot{\gamma}$
    - Druckverteilung auf OF  $\rightarrow$  Verformung und/oder Bruch (Tropfen und Agglomerate)

# Partikel in wandnahen Strömungen

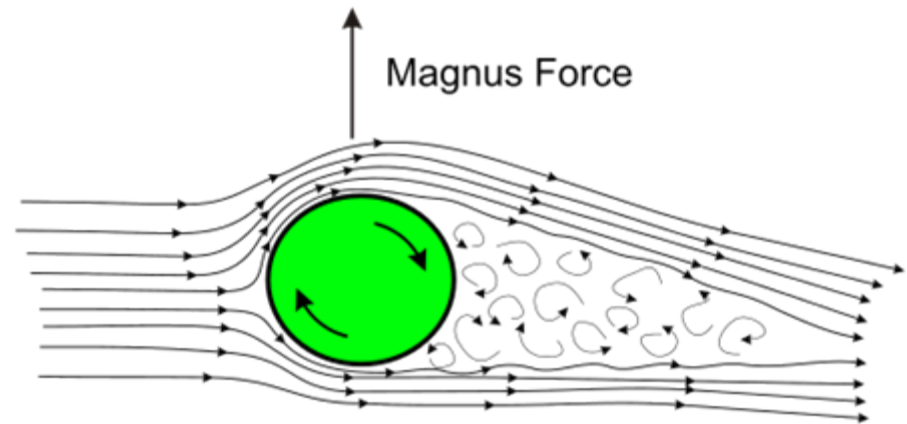
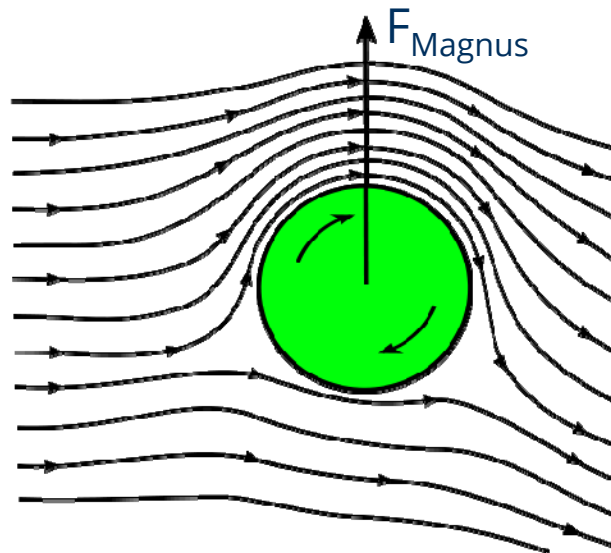


- i) Darstellung für vernachlässigbare Schwerkraft ( $\rho_p = \rho_f$ )
- ii) Angaben zu Partikelrotation  $\omega_p$  und -geschwindigkeit  $u_p$  gelten nur bei großem Wandabstand ( $y_p > 2a$ )

- wandnahes Feld = Gleichströmung + Scherströmung
- Partikeltranslation infolge axialer Strömungskräfte (Schleppkraft)
- Partikelrotation infolge von strömungsinduziertem Drehmoment
- Partikeldrift (transversale Bewegung) infolge von Druckverteilung
- bei sehr geringen Wandabständen ( $y_p \ll 2a$ ) werden Partikeltranslation und -rotation deutlich abgebremst (um ca. 35% und 80% bei  $\delta = 0.05 \cdot a$  bzw.  $\delta = 10^{-7} \cdot a$ ) während die Liftkraft anwächst

# Magnus-Effekt

= seitliche Drift eines rotierenden Körpers im Strömungsfeld aufgrund von dynamischen Auftriebskräften



Bildquellen:

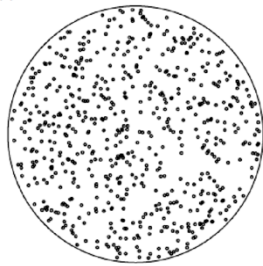
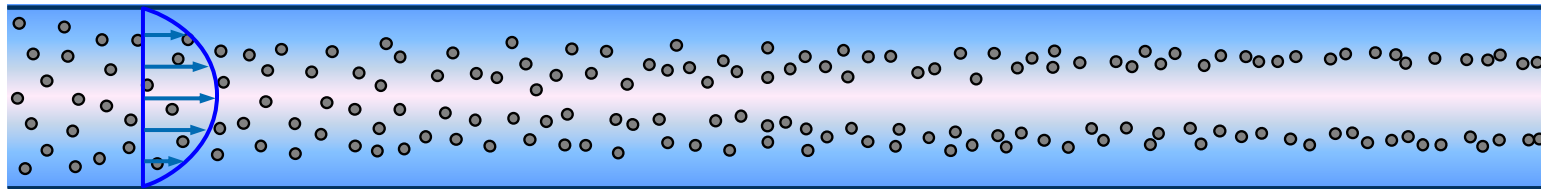
Bartosz Kosiorek, [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnus\\_effect.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnus_effect.svg)

[en.wikipedia.org/wiki/File:Sketch\\_of\\_Magnus\\_effect\\_with\\_streamlines\\_and\\_turbulent\\_wake.svg](en.wikipedia.org/wiki/File:Sketch_of_Magnus_effect_with_streamlines_and_turbulent_wake.svg)

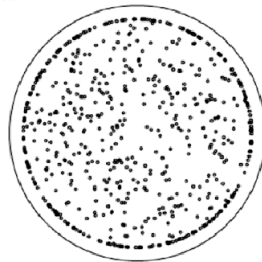
# Tubularer Pinch-Effekt

= Anreicherung der dispersen Phase an einer konzentrischen Fläche bei laminarer Kanalströmung

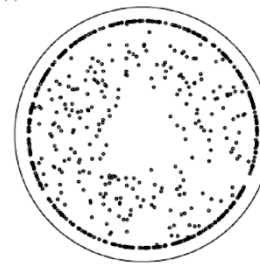
(Segré & Silberberg, *Nature*, 189:209-210, **1961**; doi:10.1038/189209a0)



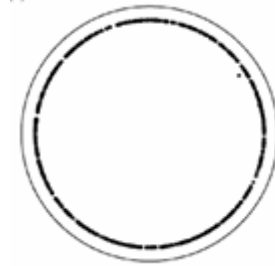
$L/x = 0$



$L/x = 6$



$L/x = 25$

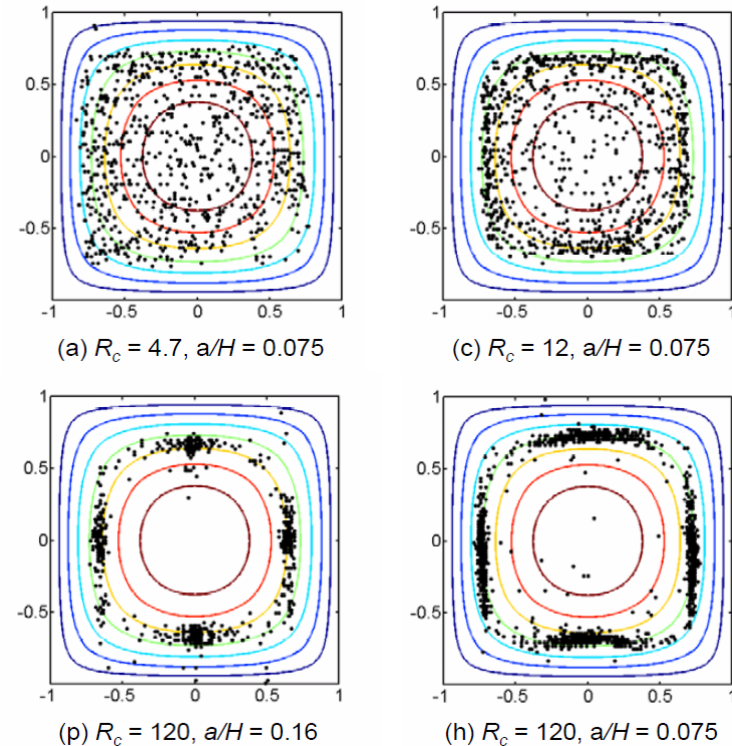
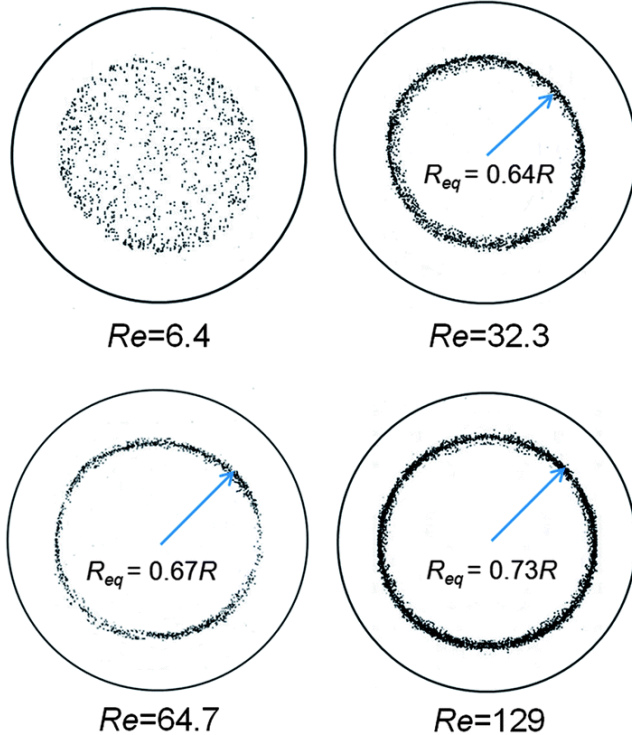


$L/x = 50$

J.-P. Matas, J. F. Morris, E. Guazelli, Inertial migration of rigid spherical particles in Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 515:171-195, **2004**.

# Tubularer Pinch-Effekt

- Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl

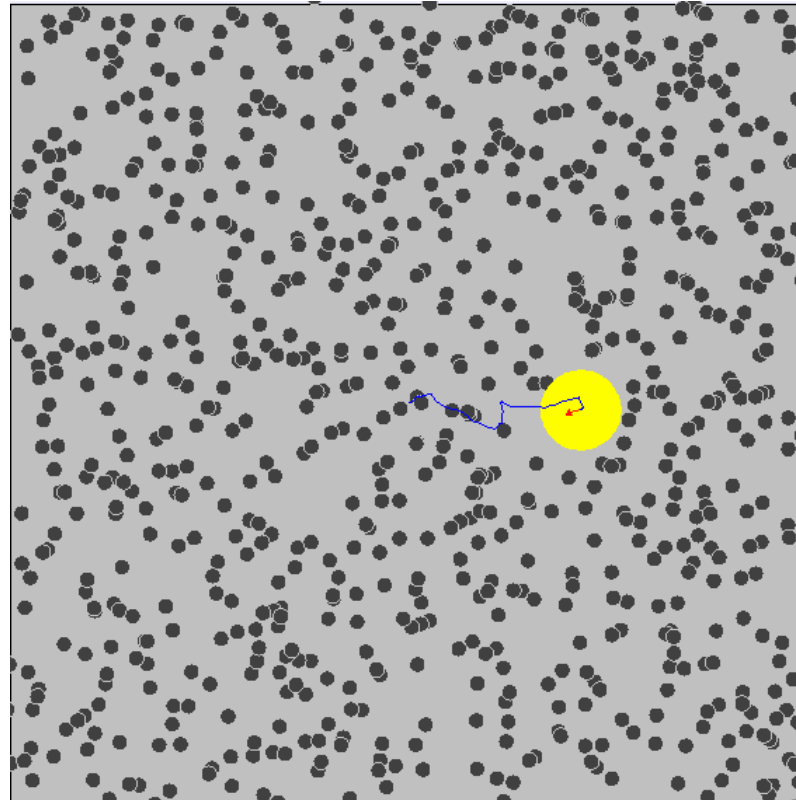


K. W. Seo, H. J. Byeon, H. K. Huh, S. J. Lee, *RSC Adv.*, 4:3512-3520, **2014**;

Y.-S. Choi, K.-W. Seo, S.-J. Lee, *Lab Cip*, 11(3):460-465, **2011**; doi: 10.1039/c01c00212g

## 2.6 Einzelpartikelbewegung – *Brownsche Bewegung* –

# Brownsche Bewegung



<http://weelookang.blogspot.de/2010/06/ejs-open-source-brownian-motion-gas.html>

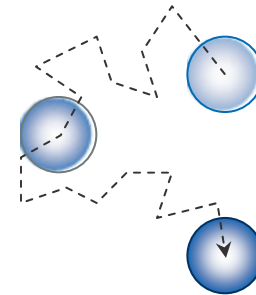
# Brownsche Bewegung

## 1. Mikroskopischer Prozess

stochastische Bewegung infolge von Stößen durch die Lösemittelmoleküle

→ diffusive Bewegung

$$\overline{\Delta r^2} = 2 \cdot D \cdot t$$

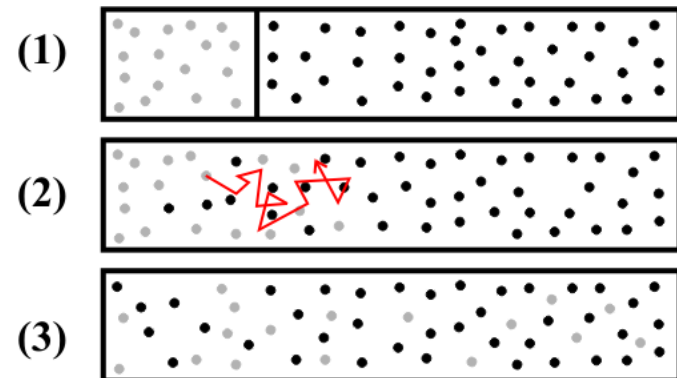


## 2. Makroskopische Wirkung

Ausgleich von Konzentrationsgradienten

→ diffusiver Stofftransport

$$\vec{J}_{diff} = -D \cdot \text{grad } c_m$$



# Berechnung nach Langevin

- Bewegungsgleichung:

$$m_p \frac{d^2 x}{dt^2} = \overset{\text{retardierende Kraft}}{-6\pi\eta a \cdot \frac{dx}{dt}} + \overset{\text{Ursache der Bewegung}}{F_{\text{stoch},x}}$$
- Multiplikation mit x:

$$\frac{m_p}{2} \frac{d^2 x^2}{dt^2} - m_p \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -3\pi\eta a \cdot \frac{dx^2}{dt} + x \cdot F_{\text{stoch},x}$$
- Mittelung:

$$\frac{m_p}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - \langle m_p v_x^2 \rangle = -3\pi\eta a \cdot \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle + 0$$

weil  $x$  und  $F_{\text{stoch},x}$  voneinander unabhängig
- kinet. Gastheorie:

$$\langle m_p v_x^2 \rangle = k_B T \quad \frac{m_p}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle + 3\pi\eta a \cdot \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = k_B T$$
- exakte Lösung:

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} + \text{const.} \times \exp\left(-\frac{6\pi\eta a}{m_p} \cdot t\right)$$
- Asymptote:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} \cdot t \quad \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} \cdot t$$

gleichrangige Bewegung in x, y & z

$$\langle r^2 \rangle = \frac{k_B T}{\pi\eta a} \cdot t = 6D_p \cdot t$$

Partikeldiffusionskoeffizient:  
(Stokes-Einstein-Gleichung)

$$D_p = \frac{k_B T}{6\pi\eta a} = \frac{k_B T}{3\pi\eta x}$$

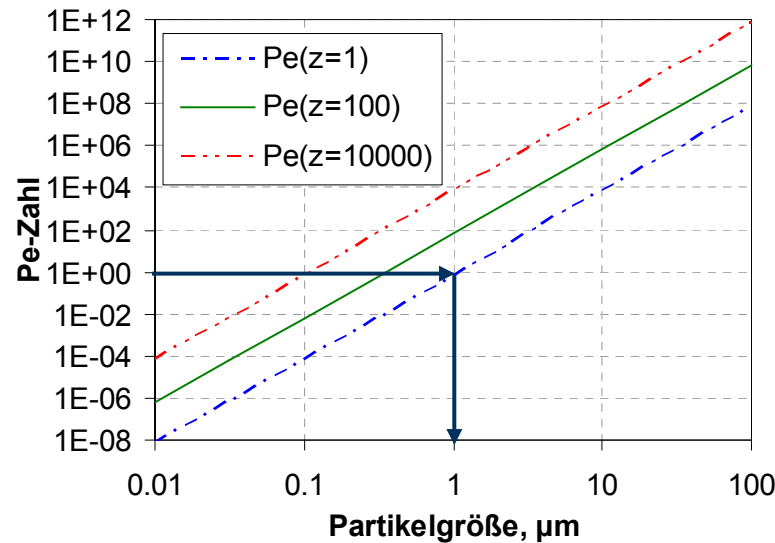
# Vergleich von Diffusion und Sedimentation

- Péclet-Zahl

$$Pe = \frac{\text{Migration}}{\text{Diffusion}} = \frac{g\Delta\rho x^4}{6k_B T}$$

$$D = \frac{k_B T}{3\pi\eta x}$$

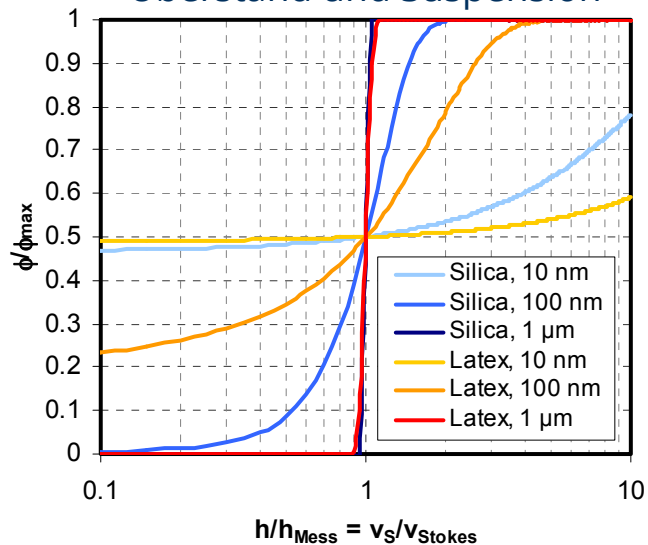
Diffusion ist wichtig bei Sedimentation von Partikeln  $\leq 1\mu\text{m}$



- Pe-Zahl als Funktion der Partikelgröße und in Abhängigkeit vom Beschleunigungsvielfachen  $z$  (im Schwerfeld:  $z = 1$ )

# Einfluss der Brownschen Bewegung auf die Sedimentation

Verwaschung des Trennspiegels zw. Überstand und Suspension

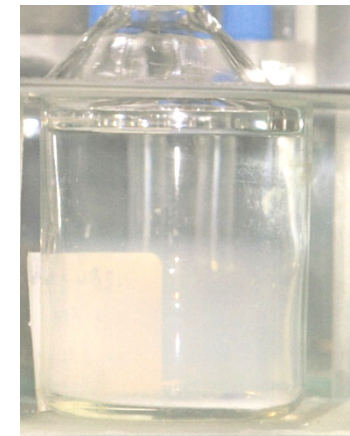


Konzentrationsprofil sedimentierender monodisperser Partikel in Wasser (Sinkweg: 10cm)

Sedimentations-Diffusions-Gleichgewicht nach (sehr) langer Wartezeit



zu Beginn



nach 4 Monaten

Langzeitbeobachtung zur Entmischung einer  $\text{SiO}_2$ -Suspension (im Wasserbad temperiert)

$$c(h_2) = c(h_1) \cdot \exp(-\Delta h/l_g) \quad \text{mit} \quad l_g = \frac{k_B T}{\Delta \rho V g}$$

## 2.7 Einzelpartikelbewegung - *Literaturverweise* -

# Literatur zu Kapitel 2

- C. E. Brennen: *Fundamentals of multiphase flows*. Cambridge University Press, **2005**; ISBN 0521 848040; <http://resolver.caltech.edu/CaltechBOOK:2005.001>  
→ chapt. 2
- P. Kulkarni, P. A. Baron, K. Willeke (eds.): *Aerosol measurement: Principles, techniques, and applications*, 3<sup>rd</sup> ed.; John Wiley & Sons, **2011**; [doi: 10.1002/9781118001684](https://doi.org/10.1002/9781118001684)  
→ chapt. 2
- H. Schubert (Hrsg.): *Handbuch der Mechanischen Verfahrenstechnik, Bd. 1*; Wiley-VCH, Weinheim, **2003**; [doi:10.1002/3527603352](https://doi.org/10.1002/3527603352)  
→ Abschn. 3.1
- M. Sommerfeld: Bewegung fester Partikel in Gasen und Flüssigkeiten. In: VDI e.V. (Hrsg.), *VDI-Wärmeatlas*, 11. Aufl., Kap. L3.1; Springer-Verlag Berlin Heidelberg **2013**; [doi:10.1007/978-3-642-19981-3\\_88](https://doi.org/10.1007/978-3-642-19981-3_88)
- M. Stieß: *Mechanische Verfahrenstechnik - Partikeltechnologie 1*; Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, **2009**; [doi:10.1007/978/3-540-32552-9](https://doi.org/10.1007/978/3-540-32552-9)  
→ Abschn. 4.1 & 4.2