DIS N1 Nachbereitungsaufgabe

Josua Kowalzik

20. Oktober 2021

1 Aufgabe N1 (a)

1.1 Aufgabenstellung (a)

Beweisen Sie, dass für beliebige Teilmengen A, B und C einer Menge U gilt:

$$(A \backslash B) \cap (A \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$$

Die in der Vorlesung aufgelisteten Rechenregeln für Mengenoperationen können Sie dazu verwenden. Geben Sie in den entsprechenden Beweisschritten dann mit an, welche Rechenregel Sie wo genau anwenden.

1.2 Lösung (a)

Beweis. Seien $A, B, C \subseteq U$ mit $(A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

Aufgrund der neu eingeführten Regel aus der Vorlesung am 20.10.[1] ergibt sich daraus:

$$\Leftrightarrow (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C})$$

Draus folgt mit dem Assoziativgesetz über Schnitte:

$$\Leftrightarrow (A \cap A) \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$$

Dies impliziert aufgrund der Idempotenz der Schnitte sowie der Rechenregel bezüglich des Komplements auf der Vorlesungsfolie Nummer 9[2]:

$$\Leftrightarrow A \cap (\overline{B \cup C})$$

Woraus sich wiederum mit der neu eingeführten Regel aus der Vorlesung am 20.10.[1] ableiten lässt:

$$\Leftrightarrow A \backslash (B \cup C)$$

$\square$

[1] $\forall A, B \subseteq U \colon A \backslash B = A \cap \overline{B}$

[2] Für zwei Mengen $A, B \subseteq U$ gilt: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2 Aufgabe N1 (b)

2.1 Aufgabenstellung (b)

Gegeben sind die Mengen $A_m = \{n \in \mathbb{N} \,|\, m < n \leq 4m\}$ für $m = 0, 1, 2, ...$

Geben Sie die Menge A_0, A_1 und A_2, sowie die Potenzmengen $\mathcal{P}(A_0)$ und $\mathcal{P}(A_1)$ als Mengen konkreter Elemente an.

Bestimmen Sie die Mächtigkeit $|\mathcal{P}(A_m)|$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$.

2.2 Lösung (b)

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \emptyset & \mathcal{P}(A_0) = \{\emptyset\} \\
&A_1 = \{2, 3, 4\} & \mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, A_1\} \\
&A_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\
&|\mathcal{P}(A_m)| = 2^{|A_m|} = 2^{4m-m} = 2^{3m}
\end{aligned}
$$