1 Finanzmathematik

<u>Gegenstand der Finanzmathematik:</u>

Untersuchung des quantitativen Zusammenhangs von Kapitalbeträgen oder Zahlungsströmen <u>zu verschiedenen Zeitpunkten</u>.

<u>Grundlegende Begriffe:</u>

- ***Kapital*** = bestimmter Geldbetrag (Wert hängt vom Betrachtungszeitpunkt ab!)
- ***Zins*** = Nutzungsentgelt für ein bestimmtes Kapital und eine bestimmte Nutzungsdauer („Preis des Geldes“)
- ***Rente*** = Folge von regelmäßig wiederkehrenden Zahlungen
- ***Tilgung*** = Rückzahlung einer Schuld
- ***Wertpapier*** = Urkunde, die ein privates Vermögensrecht verbrieft, das der Besitzer (Inhaber-W.) oder ein namentlich Benannter (Rekta-W.) ausüben kann; entspricht einem bestimmten (zeitabhängigen) Kapital
  Beispiele: Aktien, Anleihen, Schuldverschreibungen, Fondsanteile
- ***Kurs*** = Wert eines Wertpapiers zu einem bestimmten Zeitpunkt

Finanzmathematik

elementare Finanzmathematik
Grundlagen in diesem Kapitel
Hilfsmittel:
Prozentrechnung, Folgen, Reihen, Gleichungen

stochastische Finanzmathematik
erfordert Kenntnisse in Stochastik
Hilfsmittel:
stochastische Prozesse, bedingte Erwartung usw.

1.1 Zinsrechnung

1.1.1 Prozentrechnung

➔ Prozentrechnung ist Verhältnisrechnung, ein bestimmter Anteil einer Grundgröße wird umgerechnet in den entsprechenden Teil von 100 („pro cent“ (lat.) = je Hundert).

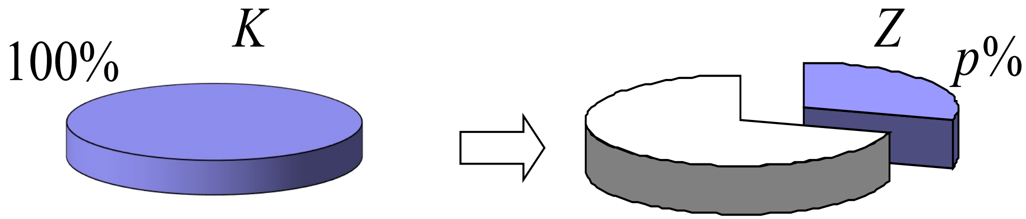
K **Grundwert**, Grundgröße, Basiswert, Basis- bzw. **Bezugsgröße**

Z **Prozentwert** (Anteil am Grundwert, kann kleiner als K, größer als K oder auch negativ sein)

p **Prozentfuß**

Wertebereiche: $K, Z, p \in$ R, $K \neq 0$

$$\frac{Z}{K} = \frac{p}{100}$$



$i := \frac{p}{100}$ **Prozentsatz** $\Rightarrow i = \frac{Z}{K}$ Der Prozentsatz i wird oft in % angegeben: $i = \frac{p}{100} = p\%$.

Beispiel 1.1: *(Prozentsatz und Prozentfuß)*

a) Umrechnen in Dezimalbruch:

$23\% =$; $367\% =$; $\frac{1}{4}\% =$; $100\% =$; $-6{,}8\% =$

b) Ermittlung des Prozentwerts:

18% von 50 Mio. ergibt

107% von 1:20min ergibt

Beispiel 1.2: *(Grundwert, Prozentwert, Prozentsatz)*

a) Von 120 Klausurteilnehmern haben 87 die Klausur bestanden.
Wie hoch (in %) ist die Quote der "Durchfaller"?

b) Auf einen Netto-Warenwert von 1.150,00 € werden 19% Mehrwertsteuer (MWSt) erhoben. Wie hoch ist der Mehrwertsteuerbetrag?

c) Bei einem Skontosatz von 3% ergibt sich ein Skontobetrag von 11,25 €. Wie hoch war der ursprüngliche Rechnungsbetrag?

Bemerkungen:

1. Statt p% schreibt man gelegentlich auch p v.H. (“vom Hundert”)

2. Neben der Angabe in % verwendet man auch die Angabe ‰ (“in Promille”).

   Dann ist zu schreiben $i = \frac{q}{1000} = q‰$

3. Will man den Unterschied zwischen zwei Prozentangaben verdeutlichen, so spricht man von **Prozentpunkten**.

Beispiel 1.3: *(Prozentpunkte)*
Die CDU ist die stärkste Partei im Sächsischen Landtag. Während Sie bei der Landtagswahl 2014 noch 39,4% der gültigen Stimmen erhielt, waren es 2019 nur noch 32,1%. Das ist eine Verringerung um .... Prozentpunkte.

□

Erhöhung/Verringerung um bestimmten Prozentsatz:

$$K^* = K + Z = (1+i)K$$

In diesem Zusammenhang bezeichnet man

- im Fall $i > 0 \ (\Rightarrow K^* > K)$: i als **Zuwachsrate** und $1 + i$ als **Zuwachsfaktor**
- im Fall $i < 0 \ (\Rightarrow K^* < K)$: i als **Abnahmerate** und $1 + i$ als **Abnahmefaktor**

Beispiel 1.2 (Forts.): *(Zuwachs-/Abnahmefaktor)*
b) Netto-Warenwert von 1.150,00 €; Der Brutto-Warenwert (inkl. MWSt) beträgt

c) Skontosatz von 3% ergibt sich ein Skontobetrag von 11,25 €. Wie hoch war der Zahlbetrag (abzgl. Skonto)?

Mehrfache Zu-/Abschläge:

$i_1, \ldots, i_n$ entsprechende Prozentsätze, die jeweils <u>nacheinander</u> auf einen Grundwert K erhoben werden

➔ $$K^* = K \prod_{k=1}^{n} (1 + i_k)$$

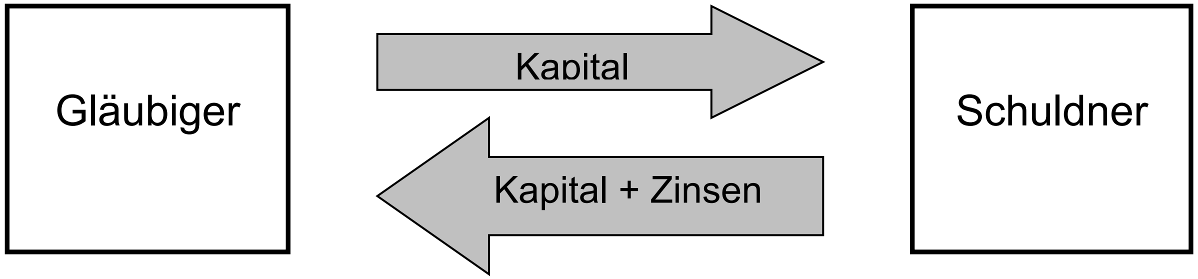
□

<u>Beispiel 1.4</u>: *(mehrere Zu-/Abschläge)*
Ein Mitarbeiter zahlt nach Abzug von 15% Personalrabatt, Aufschlag von 19% MWSt und Abzug von 3% Skonto 474,88 € für ein firmeneigenes Produkt. Wie hoch ist der unrabattierte Nettoverkaufspreis?

<u>Hinweis</u>: Beziehen sich alle prozentualen Zu- bzw. Abschläge auf denselben Grundwert, sind sie also gleichzeitig anzuwenden, so ist eine andere Formel richtig:

$$K^* = K\left(1 + \sum_{k=1}^{n} i_k\right)$$

1.1.2 Verzinsung von Kapital



Die Höhe der Zinsen hängt ab von
- der Höhe des Kapitals,
- der Dauer der Nutzung durch den Schuldner,
- dem speziell vereinbarten Zinssatz (s. u.).

Zinszuschlags- bzw. **Zinszahlungstermine**
= Fälligkeitszeitpunkte der Zinsen

Zinsperiode
= Differenz zweier aufeinanderfolgender Zinszuschlagstermine

Zinseszinsen
= Zinsen auf (schon früher gutgeschriebene) Zinsen (**geometrische Verzinsung**)

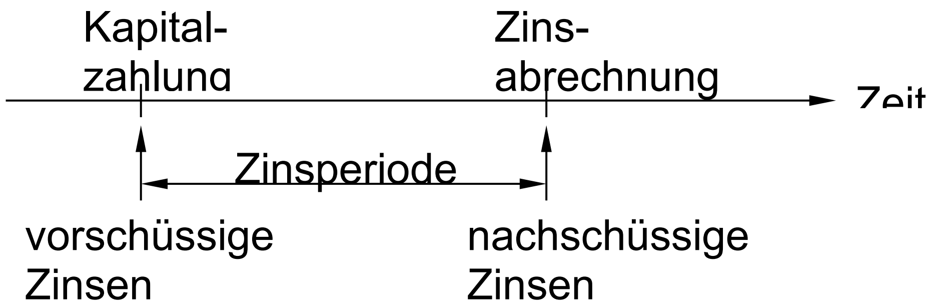
einfache Zinsen
= Zinsen nur auf das zur Verfügung gestellte Kapital

nachschüssiger (bzw. dekursiver) **Verzinsung**

= Zinsen werden am Ende einer Zinsperiode fällig (Zinszuschlagstermin = letzter Tag der Zinsperiode)

vorschüssige (bzw. antizipative) **Verzinsung**

= Zinsen werden am Anfang einer Zinsperiode fällig (Zinszuschlagstermin = erster Tag der Zinsperiode)



Beispiel 1.5: *(vor-/nachschüssige Verzinsung)*

Eine Bank (Gläubiger) stellt einem Kunden am 1.10.2022 ein Darlehen über 10.000 € zur Verfügung. Sie verlangt dafür bis zur Rückzahlung monatlich 100,00 € Zinsen.

a) Zinszahlungstermine bei nachschüssiger Verzinsung:

____

b) Zinszahlungstermine bei vorschüssiger Verzinsung:

____

<u>Allgemeine Voraussetzungen</u>:
Z1. Die Zinsen je Zinsperiode sind proportional dem zur Verfügung gestellten Kapital.
Z2. Die Zinsperiode ist ein Bruchteil eines Jahres.
Z3. Alle Zahlungen sind sicher.

□

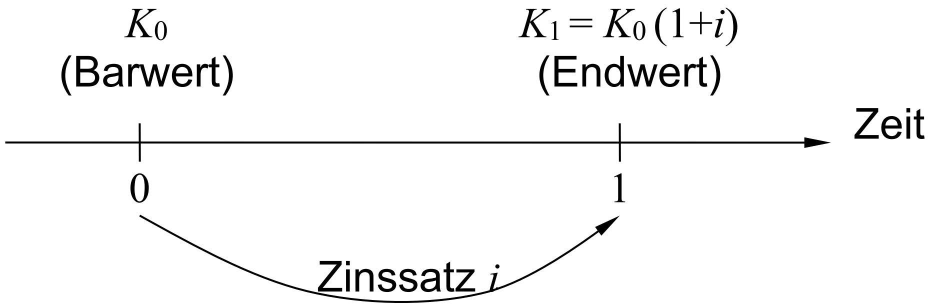
<u>Definition 1.1</u>: *(Zinssatz)*
In der Zinsrechnung bezeichnet man

- $i = Z / K$ als **Zinssatz** bzw. **Zinsrate der Zinsperiode**
- und p als **Zinsfuß der Zinsperiode**.
- Beträgt die Zinsperiode ein Jahr, so ist i der **Jahreszinssatz** bzw. der **Jahreszinsrate**) und p der **Jahreszinsfuß**.
- In allen praktischen Anwendungen gilt $i \geq 0$.
- Der Faktor $q = 1 + i$ heißt **Aufzinsungsfaktor**
- und sein reziproker Wert $d = \dfrac{1}{1+i}$ **Diskont(ierungs)faktor** zum Zinssatz i.

Beispiel 1.5 (Forts.): *(Zinssatz, Aufzinsfaktor, Diskontfaktor)*
Der Bankkunde hat monatlich 100€ Zinsen auf ein Darlehen (Kapital) von 10.000€ zu zahlen. Damit kautet
der monatliche Zinssatz:
der zugehörige Aufzinsfaktor:
der Diskontierungsfaktor:

Aufzinsungsfaktor = Verhältnis von Kapital + Zinsen zum Kapital nach einer Zinsperiode.

➔ **Anfangs-** oder **Barwert** * Aufzinsfaktor = Endwert $K_0 \cdot q = K_1$

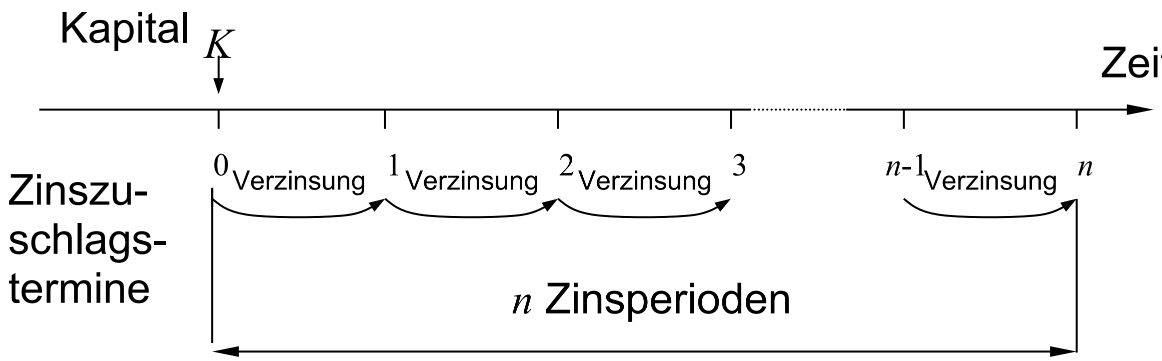


Verzinsung über 1 Periode

Umgekehrt: Diskontierungsfaktor mal Endkapital ergibt Anfangskapital zu Beginn der Periode

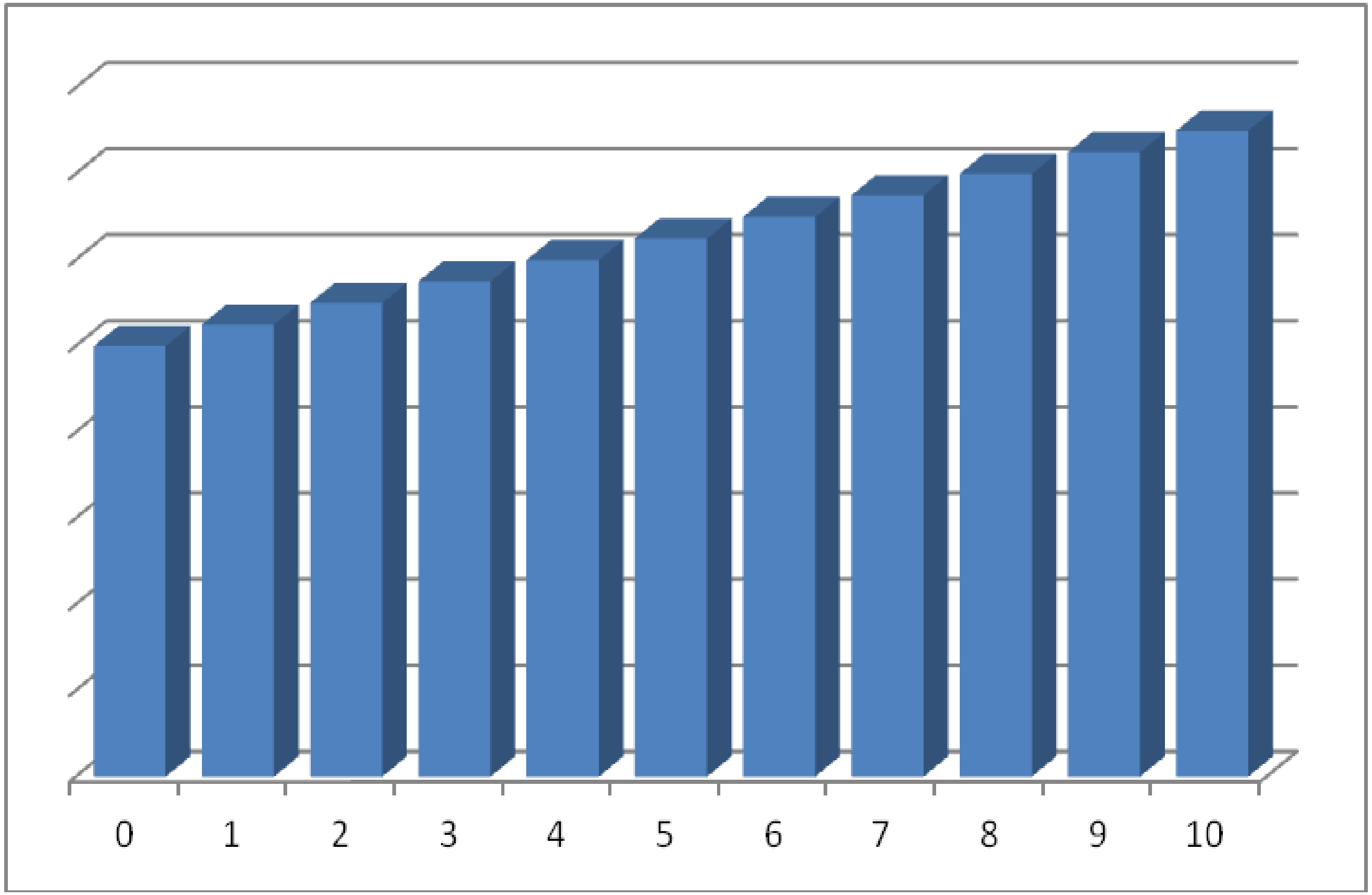
1.1.3 Einfache Verzinsung

Wir setzen in diesem Abschnitt einfache bzw. lineare Verzinsung (keine Zinseszinsen!) mit <u>konstantem Zinssatz</u> $i \geq 0$ über n Perioden voraus, $n \in \mathbb{N}$.



Verzinsung über n Perioden

$$\boxed{K_n = K(1 + ni)}$$ *(Endwert eines Kapitals bei einfacher Verzinsung)*



Wertverlauf bei einfacher Verzinsung

➔ $(K_n)_{n=1,2,\ldots}$ bildet arithmetische Folge mit dem Anfangsglied K und der Differenz Ki zweier benachbarter Glieder. Sie ist monoton wachsend.

Beispiel 1.6: *(einfache Verzinsung)*
Welches Kapital ist bei einfacher Verzinsung und $i = 7{,}5\%$ p.a. über 4 Jahre anzulegen, um 1.000 € ausgezahlt zu bekommen?

Welcher Zinssatz müsste vorliegen, um dies mit einer Einzahlung von 700€ zu erreichen?

Wieviel weitere Jahre müssten die 1.000 € mit einfacher Verzinsung und $i = 7{,}5\%$ p.a. angelegt werden, um 1.500 € zu erhalten?

□

Anmerkung: Bezeichnet i_{Jahr} den Jahreszinssatz und besteht das Jahr aus $m \in \mathbb{N}$ Zinsperioden, so bezeichnet man den Periodenzinssatz

$$i = \frac{i_{\text{Jahr}}}{m}$$

als den (zu i_{Jahr} und m gehörigen) **linear proportionalen** Zinssatz.

Hinweis auf Länge der Zinsperiode:
p.a. (per annum = pro Jahr)
p.H. (pro Halbjahr)
p.Q. (pro Quartal)
p.M. (pro Monat).

30/360-Kalenderbasis
= 1 Monat enthält immer 30 Zinstage und 1 Jahr 360 Zinstage

Einfache Verzinsung i. d. R. nur für kurze Zeiträume (< 1 Jahr).
Bei unterjährlichen linear proportionalen Zinssatz, kann man die Endwertformel $K_n = K(1+ni)$ auch mit gebrochenen Werten für n.
Beispiel: Jahresinssatz i aber nur Zeitraum nur 3 Monate: $n = \frac{1}{4}$

1.1.4 Verzinsung mit Zinseszinsen

Wir setzen in diesem Abschnitt Verzinsung mit Zinseszinsen mit konstantem Zinssatz $i \geq 0$ über n Perioden voraus, $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1.7: *(Unterschied lineare und geometrische Verzinsung)*
Gegeben sei ein Kapital von $1.000€$, das einmal jährlich mit 10% verzinst wird. Bei einfacher Verzinsung werden jährlich Zinsen fällig, d. h. der Wert des Kapitals nach 0, 1, 2, 3, ... Jahren beträgt

$$K_0 = \_\_\_\_\_\_,\ K_1 = \_\_\_\_\_\_,\ K_2 = \_\_\_\_\_\_,\ K_3 = \_\_\_\_\_\_,\ \ldots$$

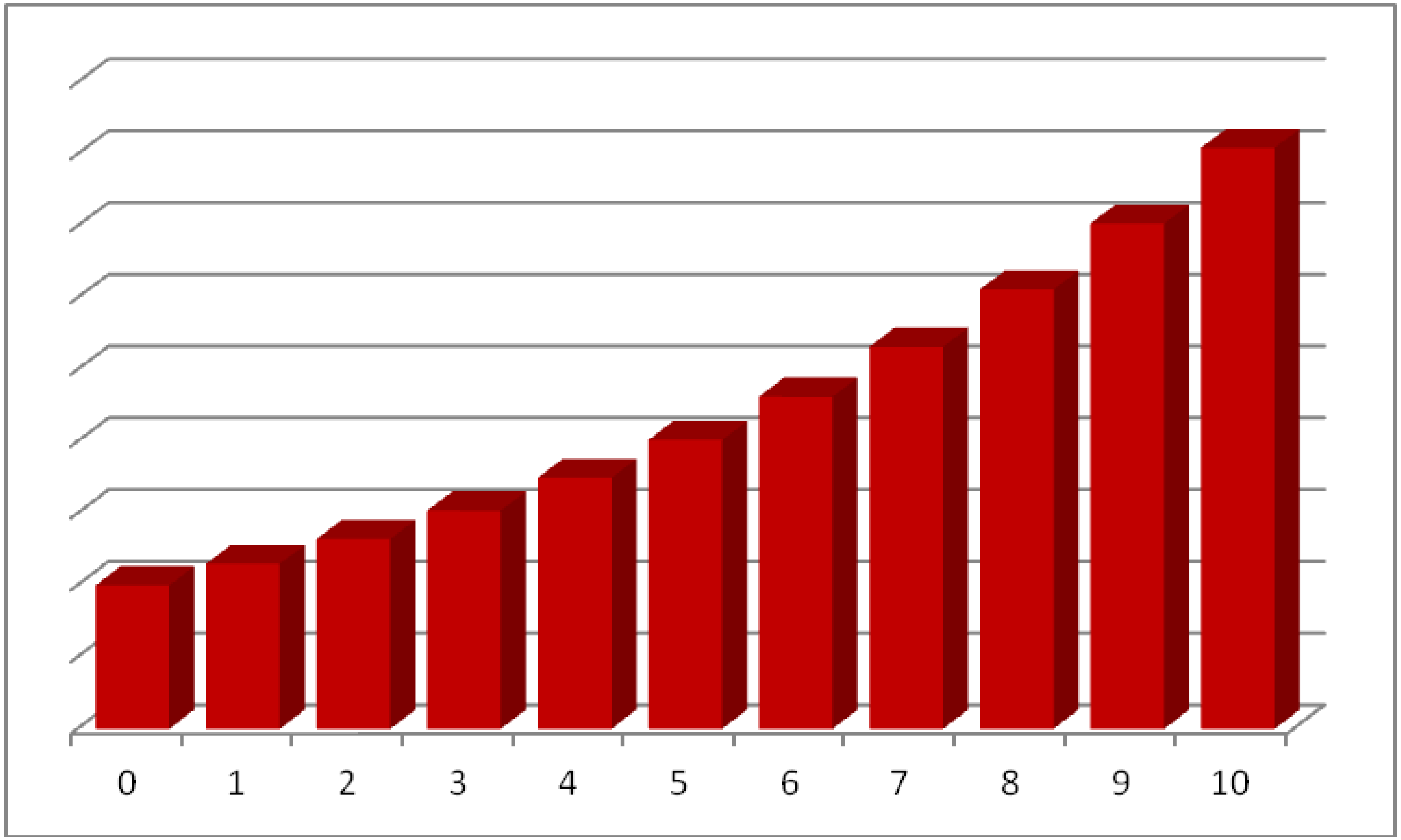
Wird hingegen mit Zinseszinsen verzinst, so ist der Zinssatz nicht auf das anfängliche Kapital, sondern auf den Wert des Vorjahres anzuwenden, so dass sich ergibt

$$K_0 = \_\_\_\_\_\_,\ K_1 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

$$K_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,\ K_3 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,\ \ldots$$

□

$\boxed{K_n = Kq^n = K(1+i)^n}$ *(Endwert eines Kapitals bei Verzinsung mit Zinseszinsen)*



Wertverlauf bei Verzinsung mit Zinseszinsen

➔ $(K_n)_{n=1,2,\ldots}$ bildet <u>geometrische Folge</u> mit dem Anfangsglied K und dem Quotient q zweier benachbarter Glieder. Sie ist <u>monoton wachsend</u> (für $i \geq 0$)

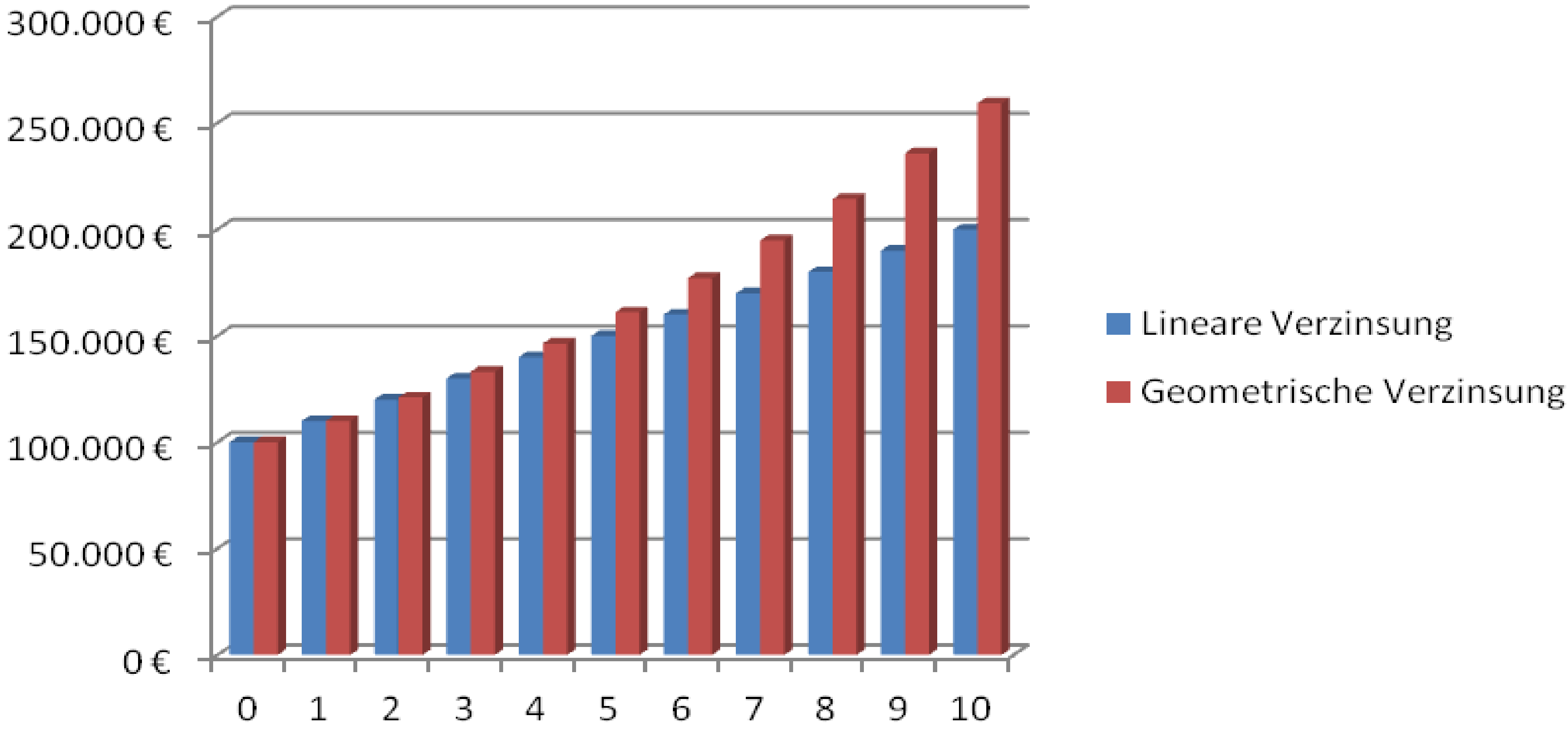
Beispiel 1.8: *(geometrische Verzinsung)*
Ein Sparer legt einen Betrag von 100.000€ für 7 Jahre fest bei einem Zinssatz von 6,8% p.a. an. Die Zinsgutschriften erfolgen jährlich. Wie hoch ist sein Kontostand nach 7 Jahren?

□

Beispiel 1.8 (Forts.): *(Vergleich lineare und geometrische Verz.)*
Der Endwert bei linearer Verzinsung beträgt aber nur:

Vergleich von linearer und geometrischer Verzinsung:

Bei identischem Anfangswert wächst das geometrisch verzinste Kapital schneller als das linear verzinste.



Fragen:
Welche Änderung ergäbe sich bei vierteljährlicher Zinsgutschrift, wenn jeweils der linear proportionale Zinssatz angewendet wird?

Endwert bei $m \in \mathbb{N}$ Zinsabrechnungen p.a.?

Beispiel 1.8 (Forts.): *(unterjährlich linear proportionaler Zinssatz)*
Bei $m = 4$ Zinsperioden jährlich mit dem linear proportionalen Zinssatz ergäbe sich nach 7 Jahren für 100.000€, Zinssatz von 6,8% p.a.

Um gleichen Endwert zu erhalten:

exponentiell proportionalen Zinssatz: $i = \sqrt[m]{1 + i_{\text{Jahr}}} - 1$

➔ Endwert nach 1 Jahr: $K(1 + \sqrt[m]{1 + i_{\text{Jahr}}} - 1)^m = K(1 + i_{\text{Jahr}}) = K_1$

➔ Zinsen mit Zinseszinsen, unterperiodisch mit exponent. proport. Zinssatz:
Endwertformel $K_n = K(1+i)^n$ auch für gebrochene Werte n

□