Prof. Dr. Ellen Henke
Dr. Julian Kaspczyk

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Gegeben seien die Mengen $A := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < 2x^2 + 1 < 100\}$, $B := \{x \in \mathbb{N} \mid |x - 7| \leq 3\}$, $C := \{2z \mid z \in \mathbb{Z}, z^2 \geq 4\}$ und $D := \{3, 4\}$.

(a) Berechnen Sie die Mengen

$$A \cup B, \quad B \cap C, \quad \mathcal{P}(B \cap C), \quad A \times D, \quad (A \setminus B) \setminus C, \quad A \setminus (B \setminus C).$$

(b) Für jede natürliche Zahl n sei $M_n := \{m \mid m \in \mathbb{N}, m \leq n\}$. Bestimmen Sie

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \text{ und } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n.$$

Aufgabe 2

Entscheiden Sie für jede gegebene Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

(i) $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1, 1\}$.

(ii) $\{2, 3, 5\} = (2, 3, 5)$.

(iii) $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, \{3\}\} = \{1, 2\}$.

(iv) $\{1, 2\} \cup \{\{2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$.

(v) $|\emptyset \cup \{1\}| = 2$.

Aufgabe 3

Sei M eine Menge. Für jede Teilmenge N von M sei $\overline{N} := M \setminus N$. Seien nun A und B Teilmengen von M. Beweisen Sie die de Morganschen Regeln

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ und}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Aufgabe 4

Seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie die Distributivgesetze

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ und}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aufgabe 5

(i) Drücken Sie die folgenden Aussagen symbolisch aus.

- Das Quadrat jeder natürlichen Zahl ist positiv.
- Es gibt keine größte natürliche Zahl.

(ii) Negieren Sie die folgenden Aussagen.

- $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2$.

(iii) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

- $\neg(A \wedge (\neg A))$.
- $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$.

Hausaufgaben

Es sind zwei der folgenden Aufgaben abzugeben. Falls mehr Aufgaben auf Ihrem Abgabezettel stehen, kreuzen Sie bitte die beiden Aufgaben an, die wir werten sollen. Bitte laden Sie die Aufgaben bis zum 25.10.2021, 12:00 Uhr, in den dafür vorgesehenen Opal-Ordner hoch.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A := \{n \in \mathbb{N}\ | n^3 > 8n^2\}$, $B := \{2n \mid n \in \mathbb{N}, |n-4| \leq 1\}$ und $C := \{z + 10\ | z \in \mathbb{Z}, z^2 < 9\}$. Berechnen Sie die Mengen

$$(A \cap B) \times (B \cap C) \text{ und } \mathcal{P}((A \cap B) \times (B \cap C)).$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Sei M eine Menge. Von den folgenden Aussagen beschreiben einige denselben Sachverhalt. Geben Sie mit kurzer Begründung an, welche das sind.

$$\begin{array}{l} (1)\ \{x\} \in M, \quad (2)\ \{x\} \subseteq M, \quad (3)\ x \in M \\ (4)\ M \setminus \{x\} \neq \emptyset, \quad (5)\ \{x\} \setminus M = \emptyset, \quad (6)\ \{x\} \cap M \neq \emptyset \end{array}$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

(i) Geben Sie Beispiele für Mengen A, B, C, D an, für welche die Gleichung

$$(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cup C) \setminus (B \cup D)$$

verletzt ist.

(ii) Beweisen Sie, dass die Inklusion $(A \cup C) \setminus (B \cup D) \subseteq (A \setminus B) \cup (C \setminus D)$ für alle Mengen A, B, C, D richtig ist.

Aufgabe 9 (5 Punkte)

(i) Drücken Sie die folgenden Aussagen in Worten aus.

- $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq n^2$.
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ q \in \mathbb{Q} : n < q < n + 1$.

(ii) Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Tautologie handelt.

- $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow \neg A$.
- $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)) \Rightarrow \neg B$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n^3 > 8n^2\}$, $B := \{2n \mid n \in \mathbb{N}, |n-4| \leq 1\}$ und $C := \{z + 10 \mid z \in \mathbb{Z}, z^2 < 9\}$. Berechnen Sie die Mengen

$$(A \cap B) \times (B \cap C) \text{ und } \mathcal{P}((A \cap B) \times (B \cap C)).$$

$A := \{n \in \mathbb{N} \mid n^3 > 8n^2\}$ $\qquad A := \{ n > 8 \, , n \in \mathbb{N} \}$

$B := \{2n \mid n \in \mathbb{N}, |n-4| \leq 1\}$ $\qquad B := \{6, 8, 10\}$

$C := \{z + 10 \mid z \in \mathbb{Z}, z^2 < 9\}$ $\qquad C := \{8, 9, 10, 11, 12\}$ da $-2 \leq z \leq 2$, $z \in \mathbb{Z}$

a) $(A \cap B) \times (B \cap C)$

$$\big((8 < n \leq +\infty) \cap (6, 8, 10)\big) \times \big((6, 8, 10) \cap (8, 9, 10, 11, 12)\big)$$

$$\{10\} \qquad \times \qquad \{(8); (10)\}$$

$$\underline{\underline{(A \cap B) \times (B \cap C) := \{(10, 8); (10, 10)\}}}$$

b) $\mathcal{P}((A \cap B) \times (B \cap C)) = 2^2$

$$\underline{\underline{\mathcal{P}((A \cap B) \times (B \cap C)) := \{\emptyset; (10, 8); (10, 10); [(10, 8); (10, 10)]\}}}$$

Aufgabe 9 (5 Punkte)

(i) Drücken Sie die folgenden Aussagen in Worten aus.

- $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq n^2$.
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, q \in \mathbb{Q} : n < q < n + 1$.

(ii) Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Tautologie handelt.

- $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow \neg A$.
- $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)) \Rightarrow \neg B$.

(i)

- $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq n^2$

  Allaussage: Für jede natürliche Zahl (ohne null) n gilt, dass diese kleiner/gleich ihrem Quadrates ist.

- $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, q \in \mathbb{Q} : n < q < n + 1$

  Zwischen der natürlichen Zahl n und ihrem direkten Nachfolger (auch Natürliche Zahl) liegt mindestens eine weitere Zahl, welche als rational beschrieben wird.

(ii)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)$	$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow \neg A$
w	w	f	f	w	f	W
w	f	f	w	f	f	W
f	w	w	f	w	f	W
f	f	w	w	w	w	W

$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow \neg A$ ist immer wahr unabhängig davon ob A/B wahr oder falsch sind

↯ Tautologie

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)$	$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)) \Rightarrow \neg B$
w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	w	w	w	w

$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)) \Rightarrow \neg B$ ist keine Tautologie da der Wahrheitswert falsch ist wenn A falsch & B wahr ist.