

DS Nachbereitungsaufgabe N4

Egan Spencer

TU Dresden — November 2024

N 4

(a)

$$A := (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge x_2 \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

Voraussetzung für die Verwendung des Horn-SAT ist, dass der Ausdruck A die richtige Form hat, dabei muss A in konjunktiver Normalform vorliegen und jede Klausel darf höchstens ein positives Literal besitzen. Da A in KNF vorliegt und die erste Klausel kein positives Literal besitzt und alle weiteren Klauseln genau ein positives Literal besitzen, ist A in der richtigen Form und die Voraussetzung erfüllt.

Anwendung des Horn-SAT: Schritt 1: Jede Klausel mit genau einem positiven Literal und keinen weiteren Literalen muss für jede erfüllende Bedingung von A dem Wert 1 zugewiesen werden und wird markiert. Hier: $\{x_2\}$

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge \boxed{x_2} \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

Schritt 2: Das negative solcher gefundenen Literale kann in jeder Klausel weggestrichen werden. Hier alle: $\{\neg x_2\}$

$$(\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge x_2 \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

Schritt 3: Überprüfen ob es eine leere Klausel () gibt: Nein.

Schritt 4: Der erste Schritt wird nun wiederholt. Diesmal: $\{x_3\}$

$$(\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge x_2 \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge \boxed{x_3} \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

Schritt 5: Der zweite Schritt wird nun wiederholt. Diesmal alle: $\{\neg x_3\}$

$$(\neg x_1) \wedge x_2 \wedge (x_1) \wedge x_3 \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

Schritt 6: Überprüfen ob es eine leere Klausel () gibt: Nein.

Schritt 7: Der erste Schritt wird nun wiederholt. Diesmal: $\{x_1\}$

$$(\neg x_1) \wedge x_2 \wedge \boxed{x_1} \wedge x_3 \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

Schritt 5: Der zweite Schritt wird nun wiederholt. Diesmal alle: $\{\neg x_1\}$

$$() \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_3 \wedge (x_2)$$

Schritt 6: Überprüfen ob es eine leere Klausel () gibt: Ja.

Somit ist der Ausdruck nicht erfüllbar, da die leere Klausel den Wert 0 besitzt, wodurch der ganze Ausdruck in KNF immer falsch ist und keine erfüllende Bedingung besitzt.

(b)

z.z. Aussage A_n gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$A_n : \sum_{k=1}^n (3k - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

Beweis: (1) Induktionsanfang: z.z. A_1 ist wahr

$$\sum_{k=1}^1 (3k - 2) = (3 \cdot 1 - 2) = 1 \text{ \underline{und}} \frac{1}{2} \cdot 1(3 \cdot 1 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

A_1 ist wahr.

(2) Induktionsschritt: z.z. Wenn A_n gilt (Induktionsvoraussetzung), dann gilt auch A_{n+1}
(Induktionsbehauptung)

$$\begin{aligned} A_{n+1} : \sum_{k=1}^{n+1} (3k - 2) &= \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (3(n+1) - 1) = \frac{1}{2}(3n^2 + 5n + 2) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (3k - 2) = \sum_{k=1}^n (3k - 2) + (3 \cdot (n+1) - 2) = \sum_{k=1}^n (3k - 2) + (3n + 1) \\ &= \frac{1}{2}n(3n - 1) + (3n + 1) \end{aligned}$$

(Induktionsvoraussetzung)

$$= \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + (3n + 1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

($\frac{1}{2}$ ausklammern)

$$= \frac{1}{2}(3n^2 + 5n + 2)$$

□