1. Zur Hohlraumstrahlung – Wiensches Verschiebungsgesetz:

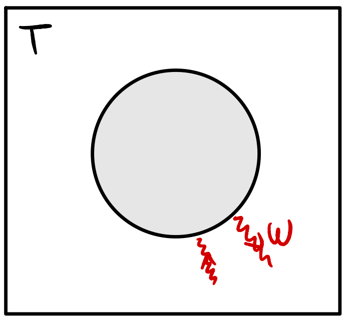
   a) Aus der Planckschen Strahlungsverteilung (hier gegeben als Funktion von $\omega = 2\pi\nu$)

   $$u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}$$

   leite man das Wiensche Verschiebungsgesetz $\lambda_{\max} T = b = const$ her und bestimme b. Dabei ist $\lambda_{\max}$ diejenige Wellenlänge, bei der die Strahlungsverteilung als Funktion der Wellenlänge ihr Maximum erreicht.

   b) Welche Wellenlänge entspricht dem Maximum des Spektrums der Strahlung eines schwarzen Körpers bei 300 K (Zimmertemperatur) sowie bei 5800 K (Sonne)?

Schwarzer Strahler → idealer Emitter/Absorber



→ kann Energie mit Umgebung (Wärmebad) austauschen in Form von elektromagn. Strahlung (Licht)

→ Quantenhypothese: Energieabgabe ist quantisiert (Licht tritt in Quanten auf)

Ein Lichtquant (Photon) mit Frequenz ω hat Energie

$$E_0 = \hbar\omega$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht wird die spektrale Energiedichte durch Plancksche Strahlungsverteilung beschrieben:

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}$$

a) Suche Maximum d. spektralen Energiedichte als Funktion d. Wellenlänge λ

Dafür drücken wir zun. $u(\omega, T)$ durch λ aus.

Betrachte die Energiedichte:

$$W = \int_0^\infty d\omega \, u(\omega, T) \stackrel{!}{=} \int_0^\infty d\lambda \, \tilde{u}(\lambda, T) \qquad (1)$$

Zusammenhang zw. Frequenz u. Wellenlänge:

$$\omega(\lambda) = c\,k(\lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda(\omega) = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$W = \int_0^\infty d\omega \, u(\omega, T) \underset{\text{Substitution}}{=} \int_{\lambda(0)}^{\lambda(\infty)} d\lambda \, \frac{d\omega}{d\lambda} \, u(\omega(\lambda), T)$$

$$= -\int_\infty^0 d\lambda \, \frac{2\pi c}{\lambda^2} \, u(\omega(\lambda), T)$$

$$= \int_0^\infty d\lambda \, \underbrace{\frac{2\pi c}{\lambda^2} \, u(\omega(\lambda), T)}_{\stackrel{!}{\underset{(1)}{=}} \tilde{u}(\lambda, T)}$$

$$\Rightarrow \tilde{u}(\lambda, T) = \ldots = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

Suche Maxima von $\tilde{u}$ bzgl. λ.

$$0 \overset{!}{=} \frac{d\tilde{u}}{d\lambda} = 8\pi hc \left(-\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} - \frac{1}{\lambda^5} \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1\right)^2} \cdot \left(-\frac{hc}{\lambda^2 k_B T}\right)\right)$$

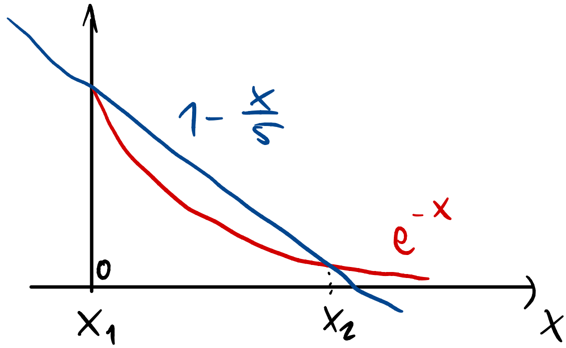
$$= \frac{8\pi hc}{\lambda^6} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \times \underbrace{\left[-5 + \frac{hc}{\lambda k_B T} \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}\right]}_{\overset{!}{=} 0}$$

Suche Lsg. von Gleichung $\left(x = \frac{hc}{\lambda k_B T}\right)$

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 5 = \frac{x}{1 - e^{-x}} \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x} = 1 - \frac{x}{5} \quad \text{falls } x \neq 0! \qquad (3)$$

Grafische Lösung:



Zwei Lösungen: $x_1 = 0$ ist Lösung von (2) aber nicht von (3) ($x \neq 0$!)

$x_2 \simeq 4{,}965 \equiv x_0 \rightarrow$ Maximum

↑ grafisch

$$\Rightarrow \lambda_{max} = \frac{hc}{x_2 k_B T} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} \lambda_{max} T &= \text{const.} \\ &= 0{,}29 \text{ cm K} \end{aligned}}$$

b) Für $T = 300$ K: $\lambda_{max} = 9600$ nm (IR-Strahlung)

Für $T = 9600$ K (Sonne): $\lambda_{max} = 496$ nm (grünes Licht)

2. Man berechne mit der BOHR-SOMMERFELDschen Quantenbedingung

$$I(E) = \oint \mathrm{d}x\, p(E,x) = h(n+n_0) \quad n = 0,1,2,\ldots$$

a) die Energieniveaus im Potenzial ("*Kasten*")

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{für } -a/2 < x < a/2 \\ \infty\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

b) die Abhängigkeit der Energieniveaus E_n von der Quantenzahl n für Potenziale der Form

$$V(x) = V_0\,|x/a|^\alpha\ ; \quad (V_0, a, \alpha \text{ - const} > 0)$$

Hinweis: Das auftretende Integral muss vorerst nicht explizit berechnet werden.
Was ergibt sich speziell für $\alpha = 2$ und $\alpha = 1$?

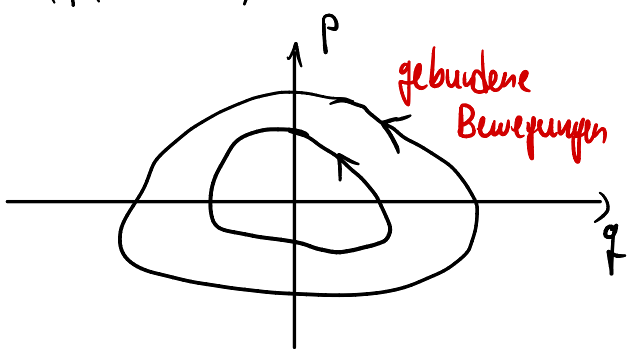
klassisch: System mit einem Freiheitgrad durch generalisierte Koordinate q und konj. Impuls p und Hamiltonfunktion $H(q,p)$ beschrieben

Dynamik: kanonische Gleichungen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}\,, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$\Rightarrow$ Trajektorie im 2D Phasenraum

$$t \mapsto (q(t), p(t))$$



→ klassisch: keine Einschränkung an Bahnen, so lange mit BWGL kompatibel

→ Bohr - Sommerfeld Quantisierung

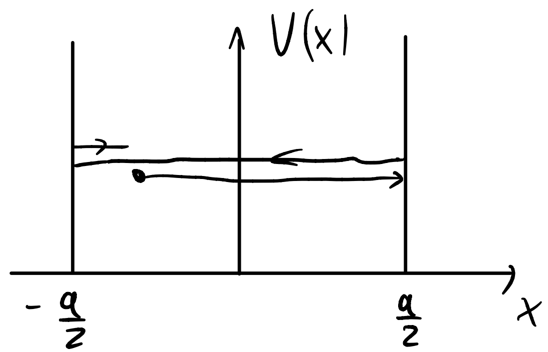
Phasenraumfläche

$$I(E) = \oint dq\, p(E, q) = h\,(n + \underbrace{u_0}_{\text{ad-hoc offset}})$$

ist quantisiert

⇒ Quantisierung d. Energie

a) Kastenpotential: $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{f. } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$

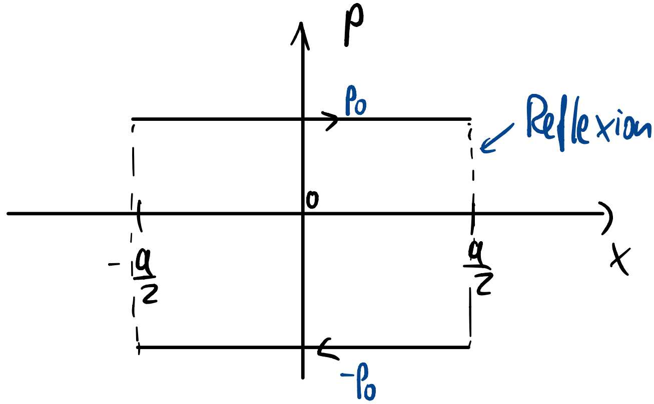


Hamiltonfunktion im Kasten: $\left(|x| < \frac{a}{2} \right)$

$$H(x, p) = T(p) + V(x) = \frac{p^2}{2m} \stackrel{!}{=} E = \text{const.}$$

Da Energie erhalten ist, ist Impuls: $p(E) = \pm \sqrt{2mE}$
$\equiv \pm p_0$

Phasenraumbahnen:



Fläche im Phasenraum: $I(E) = a \cdot 2 p_0 \quad = 2a\sqrt{2mE}$

$$\stackrel{!}{=} h(n+n_0)$$

$$\Rightarrow E \equiv E_n = \frac{h^2 (n+n_0)^2}{8ma^2}$$

mit $n = 0, 1, 2, \ldots$

Bem: Die korrekte Lösung ist

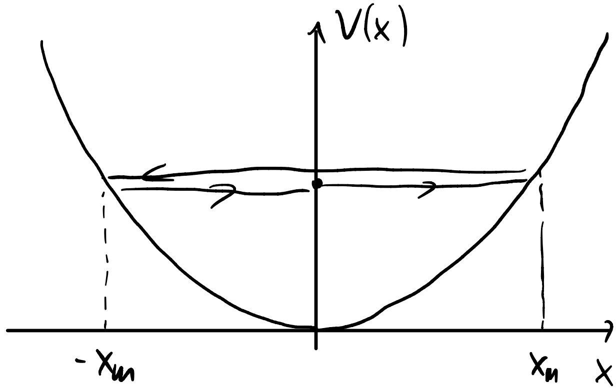
$$E_n = \frac{h^2 n^2}{8ma^2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow n_0 \stackrel{!}{=} 1$$

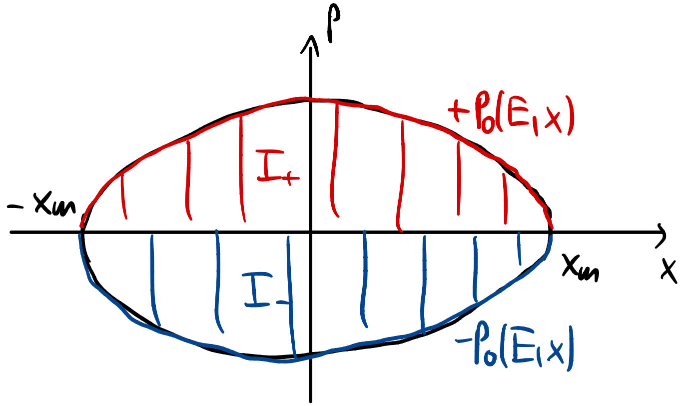
b) $V(x) = V_0 |x/a|^\alpha = V(-x)$

$\Rightarrow$ Energie: $E = \frac{p^2}{2m} + V_0 \left|\frac{x}{a}\right|^\alpha$

$$\Rightarrow p(E,x) = \pm p_0(E,x) = \pm\sqrt{2m(E - V(x))}$$



Phasenraumbahnen



Wegen Symmetrie: $I_+ = I_-$

$$\Rightarrow I(E) = \oint dx\, p(E,x) = I_+(E) + I_-(E)$$

$$= 2 I_+(E)$$

$$= 2 \int_{-x_m}^{x_m} dx\, p_0(E,x)$$

$$= 4 \int_0^{x_m} dx\, p_0(E,x)$$

Symmetrie des Potentials

$$\ldots = 4 \int_0^{x_m} dx \sqrt{2m\left[E - V_0\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right]}$$

$$= 4\sqrt{2mE} \int_0^{x_m} dx \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\left[\frac{V_0}{E}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}}$$

Mit Substitution $y = \frac{x}{a}\left(\frac{V_0}{E}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow dy = \left(\frac{V_0}{E}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{a} dx$

$$I(E) = 4\sqrt{2mE} \int_0^{\frac{x_m}{a}\left(\frac{V_0}{E}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} dy \; a \left(\frac{V_0}{E}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \sqrt{1 - y^{\alpha}}$$

Bestimme x_m: Am Umkehrpunkt gilt $p = 0$

$$E = V_0\left(\frac{x_m}{a}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{E}{V_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{x_m}{a}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{x_m}{a}\left(\frac{V_0}{E}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow I(E) = 4\sqrt{2mE}\, a \left(\frac{E}{V_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \underbrace{\int_0^1 dy \sqrt{1 - y^{\alpha}}}_{\equiv C \text{ unabh. von } E}$$

$$E^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}} = E^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}$$

$$\stackrel{!}{=} h(n + n_0)$$

$$\boxed{E = E_n = \left(\frac{h\,(n+n_0)}{4aC\sqrt{2mV_0}} \right)^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}}$$

Spezialfälle:

$\alpha = 2$: harmonischer Oszillator

Berechne Konstante

$$C = \int_0^1 dy \underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{= x(y)}$$

Punkte auf Graph erfüllen: $1 = y^2 + x^2(y)$

$\Rightarrow$ liegen auf Kreis mit Radius 1

$\Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{4}$ Viertelkreisfläche

$$\Rightarrow \boxed{E_n = V_0 \frac{2h(n+n_0)}{2\pi a\sqrt{2mV_0}} = \hbar \underbrace{\sqrt{\frac{2V_0}{ma^2}}}_{\equiv \omega} (n+n_0) = \hbar\omega\,(n+n_0)}$$

Die „korrekte" Rechnung zeigt: $n_0 = \frac{1}{2}$

$\alpha = 1$:

$$C = \int_0^1 dy \sqrt{1-y} = -\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \boxed{E_n = V_0 \left(\frac{3h(n+n_0)}{8a\sqrt{2mV_0}} \right)^{2/3}}$$

Bem: Quasiklassische Näherung zeigt $n_0 = \frac{1}{2}$

3. Ein monochromatischer Lichtstrahl der Wellenlänge $\lambda = 4.0 \cdot 10^{-7}$m fällt senkrecht auf Materie mit der Austrittsarbeit $W_a = 2.0$ eV. Der Strahl hat eine Intensität von $I = 3.0 \cdot 10^{-9}$W/m^2. Bestimmen Sie

   a) die Stromdichte j_e (= Anzahl pro m^2 und pro s) der emittierten Elektronen (Annahme: jedes Photon schlägt ein Elektron heraus)

   b) die pro m^2 und pro s absorbierte Energie (in eV/m^{2}s)

   c) die kinetische Energie der Photoelektronen (in eV).

Photoeffekt: Photonen haben Energie

$$E_{ph} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 3.09\,eV > W_a = 2\,eV$$

$\Rightarrow$ können Elektronen herausschlagen

Stromdichte

$$j_e = \frac{N_e}{\Delta t\, \Delta A} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pro Photon} \\ \text{ein Elektron}}}{=} \frac{N_{ph}}{\Delta t\, \Delta A} = \underbrace{\frac{N_{ph} \cdot E_{ph}}{\Delta t\, \Delta A}}_{=I} \frac{1}{E_p}$$

$$= \frac{I}{E_p}$$

$$= \frac{I\lambda}{hc}$$

$$= 6 \cdot 10^9 \frac{1}{m^2 s}$$

b) $$\frac{E_{abs}}{\Delta t \Delta A} = \frac{N_{ph} W_A}{\Delta t \Delta A}$$

Absorbierte Energie

$$= \frac{I W_A \lambda}{hc} = 1{,}2 \cdot 10^{10} \frac{eV}{m^2 s}$$

c) $$E_{kin} = h\nu - W_a = 1{,}09 \, eV$$

4. Bei Kristallstrukturuntersuchungen werden Röntgenstrahlen mit einer Wellenlänge $\lambda \approx 10^{-10}$m benutzt. Welche Energie haben für diese Wellenlänge die Photonen? Welche Energie müßten Elektronen und Neutronen haben, um analoge Strukturuntersuchungen möglich zu machen (Energieabschätzung in eV)?

Photonen: $E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda} = 10^4\,eV$

Elektronen: $E_e = \dfrac{p^2}{2m_e} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{1}{2m_e}\left(\dfrac{h}{\lambda}\right)^2 = 1{,}2 \cdot 10^2\,eV$

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$

Neutronen $E_n = \dfrac{p^2}{2m_n} = E_e \underbrace{\dfrac{m_e}{m_n}}_{\simeq \frac{1}{1800}} = 7 \cdot 10^{-2}\,eV$