Innenwinkelsatz für Dreiecke

Behandlung mathematischer Sätze und ihrer Beweise

Rentsch, Madlen und Püschel, Joachim

27. Januar 2019

Struktur des Vortrags

1) Ziele des Beweisens in der Schule
2) Motivation zum Beweisen
3) (Schüler-)Schwierigkeiten beim Beweisen
4) Stufen des Beweisens
5) Beweisen im Unterricht
6) Fazit
7) Quellen

1) Ziele des Beweisens in der Schule

Beweisfindung als Problemlösen

nicht Beweisdarstellung!

Bedeutung des einzelnen Satzes ist unwichtig

Beweis von Schülern selbst zu entdecken

Beweis einfach und anschaulich zu führen

Endziel (Beweis um des Beweisens Willen):

„Ist die Aussage allgemeingültig?“ → „Wie und warum kann aus Voraussetzungen die Behauptung gefolgert werden?“

2) Zum Beweisen motivieren

Beweisen nur von Aussagen, deren Allgemeingültigkeit nicht sofort ersichtlich ist. [1]

Die Summe aller Winkel in **jedem** Dreieck beträgt 180°.

x + 0 = x

Unterschied zwischen empirischen Methoden (Zeichnen, Messen, einzelne Beispiele) und exakten Schlüssen verdeutlichen.

Wahrheiten als Voraussetzungen für andere Wahrheiten:

„**Wenn** Wechselwinkel immer gleich groß sind, **dann** stimmt auch der Innenwinkelsatz.“

Aha!-Erlebnisse provozieren.

im Dialog: Schüler an Zweifeln teilhaben lassen

3) Schwierigkeiten bei Beweisen

Zwischen 1964 und 1989 wurde die Beweisfähigkeit der Schüler nicht verbessert [2]. Ursachen sind u. A.:

- fachsprachlicher Ausdruck,
- Verwenden von Variablen und Symbolen,
- mangelndes sprachlogisches Verständnis für Existenz und Eindeutigkeit (z. B. Quantoren),
- Überbetonung der formalen Beweisdarstellung.

Lässt man alle Arten der Argumentation und Begründung zu, die als schlüssig angesehen werden können, fallen viele Schwierigkeiten weg [3].

4) Stufen des Beweisens

Stufe des Argumentierens,

prämathematischer Beweis

Stufe des inhaltlichen Schließens,

Stufe des formalen Schließens

Stufe des Argumentierens

starker Handlungsbezug (*enaktiv*)

Bezugnahme auf die Beweisfigur (*ikonisch*)

kurze, mündliche Argumentationskette,

die andere überzeugt

veranschaulichende Hilfsmittel (Modelle, Folien, …)

kein „Tieferbohren", solange es unnötig ist

→ **aber: die Beweisideen sind ersichtlich und lassen sich auf das nächsthöhere Niveau übertragen.**

Stufe des Argumentierens (2)

Der Satz wird oft gemeinsam mit seiner Allgemeingültigkeit gewonnen,

weil aus Beispielen auf die Allgemeingültigkeit geschlossen wird.

Unterschied zwischen empirischer Vermutung und Einsicht wird verdeutlicht.

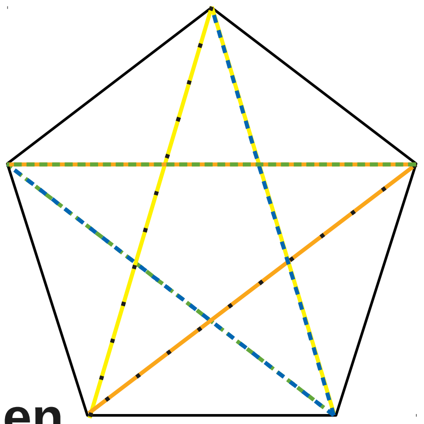
Beweisverständnis ist kein Ziel.

Argumente für die Gültigkeit der Behauptung angeben,

Argumente anderer aufgreifen, weiterführen oder widerlegen,

Beweisgedanken verstehen und wiedergeben.

Beispiele



Abzählungen, z. B. Diagonalen eines n-Ecks

n-Eckpunkte, jeder Punkt hat n-3 Diagonalen,

jede Diagonale ist doppelt belegt,

also $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$ Diagonalen.

Flächeninhalt durch Zerlegen, Bewegen und Zusammensetzen

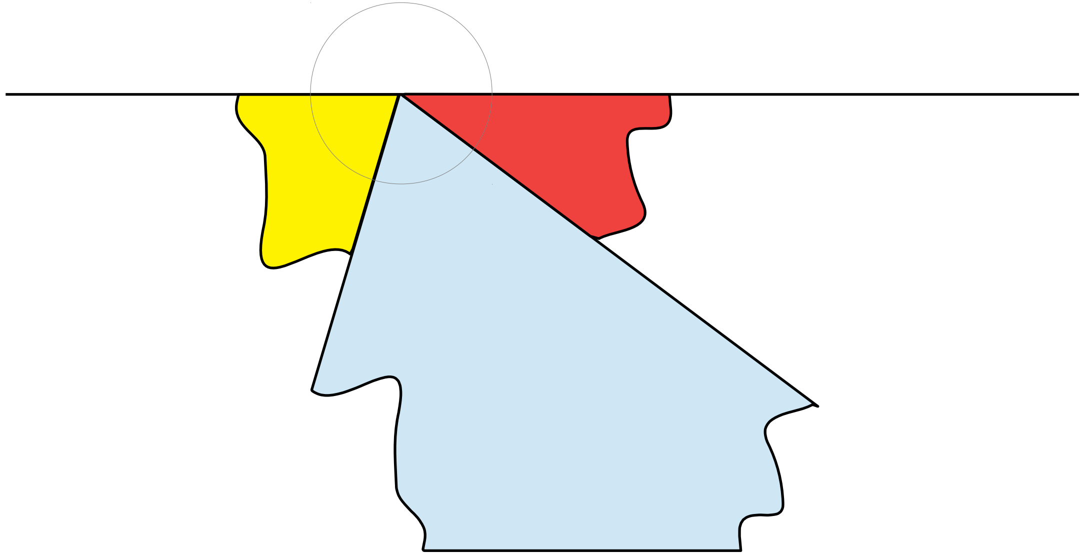
Beispiele im Seminar

Gummimodell für Dreiecksungleichung

Je straffer, desto länger die Strecke.

Beispiele

Innenwinkelsumme bei Dreiecken



Stufe des inhaltlichen Schließens

Idee der Allgemeingültigkeit steht im Vordergrund

schriftlicher, umgangssprachlicher Beweis

Beweisidee (samt genutzter Sätze),

Folge der Beweisschritte (möglichst lückenlos),

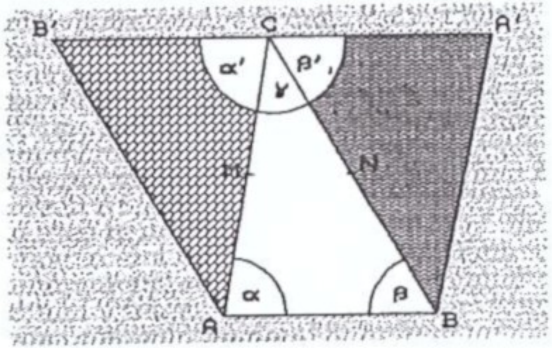
Bezug auf die Beweisfigur,

Begründung der Beweisschritte (nicht ausführlich).

Beispiele

Beispiel 5: *Winkelsummensatz für Dreiecke*

Beweis[4]:
Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC. Führe jeweils eine Punktspiegelung des Dreiecks am Mittelpunkt M der Seite AB und am Mittelpunkt N der Seite BC durch.



Du erkennst:
(1) $\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$, da bei C ein gestreckter Winkel entsteht.
(2) $\alpha' = \alpha$, da (α, α') ein Wechselwinkelpaar ist.
(3) $\beta' = \beta$, da (β, β') ein Wechselwinkelpaar ist.

Du darfst wegen (2) und (3) in Gleichung (1) nun α' durch α und β' durch β ersetzen. Du erhältst: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Damit haben wir bewiesen, daß in jedem Dreieck die Summe der Winkelmaße der drei Winkel $180°$ beträgt.

Stufe des formalen Schließens

Der Beweis und -prozess dient vorrangig, um den konsistenten Aufbau der Mathematik zu zeigen.

Axiome oder bewiesene Sätze als Voraussetzung

Ziele:

- notierbare Beweiszeilen, die deduktiv und logisch schlüssig aufeinanderfolgen,
- Überprüfung auf Schlüssigkeit und Lückenlosigkeit,
- Verfeinerung eines gegebene Beweises,
- Vergleich und Bewertung zweier gegebener Beweise.

Beispiele

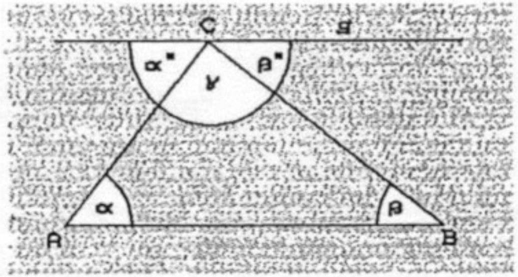
Beispiel 7: *Winklsummensatz für Dreiecke*

1.Beweis:

Voraussetzungen

(1) *ABC* sei ein Dreieck

(2) *g* sei die Parallele zu *AB* durch *C*



Folgerungen

(3) (α, α') ist ein Wechselwinkelpaar

(4) (β, β') ist ein Wechselwinkelpaar

(5) $\alpha = \alpha'$ (3, S1)

(6) $\beta = \beta'$ (4, S1)

(7) $\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$ (Beweisfigur, S2)

(8) $\alpha + \gamma + \beta = 180°$ (5, 6, 7)

Benutzte Sätze:

(S1) Wechselwinkelsatz

(S2) Jeder gestreckte Winkel hat das Winkelmaß *180 °*

5) Beweisen im Unterricht

„Nicht durch häufiges Vorführen und Wiederholen von Beweisen, nicht durch sofortiges zielgerichtetes Hinsteuern zum strengen, ausgefeilten Beweis, nicht durch sofortige Einengung beim ersten Anlauf, die die Selbsttätigkeit ersticken“, [lehrt man Beweisen.]

„Man lernt Beweisen durch selbständige *Beweisversuche*. Freilich […], ohne die koordinierende, steuernde und ergänzende Hilfe des Lehrers geht es nicht.“ [4]

Finden einer Vermutung,

Erschaffung einer Beweisidee,

Formulierung des Beweises.

Didaktische Methoden.

Die Vermutung

Vermutung finden

- klare Eingrenzung des Problems durch feste und variable Eigenschaften
- unterschiedliche Beispiele betrachten
- Ergebnisse protokollieren
- nach Gemeinsamkeiten der Einzelfälle suchen

Vermutung belasten

- zufällig gewählte Längen, Strecken, Winkel prüfen
- Extrembeispiele einbeziehen

Vermutung präzise formulieren

Die Beweisidee

Aktivierung von hilfreichem Wissen,

z. B. Systematisierungen, Konstruktionsregeln, Rechenregeln

Identifikation von mathematischen Konzepten,

z. B. Kongruenz, Strukturgleichheit

plausible Zwischenbehauptungen erzeugen und mit Argumenten verbinden.

Strategien zur Findung von Beweisideen

Strukturierung der Problemsituation, z. B. in einer Skizze

Voraussetzungen, Behauptungen

Sammeln von potenziell hilfreichen Aussagen in einer Stichwortliste

Einzeichnen plausibler Hilfslinien für weitere Informationen über die Problemsituation

Vermutungen in der Skizze kennzeichnen

Überprüfen an anderen Skizzen!

Protokollieren bewiesener Teilschritte

Der Beweis

Auswahl geeigneter Argumente und Erzeugung einer deduktiven Kette.

- formale Kriterien
  - → Durcharbeiten fertiger Beweise
- zulässige Argumentationen
  - → Lehrer als Instanz,
  - → Verknüpfung der Beweisideen im Klassengespräch

Grundlage ist die Beweisidee mit Zwischenbehauptungen.

Schwierigkeiten sind die große Informationsfülle und -vernetzung.

Didaktische Methoden

explorativ-induktive Gedankenspiele

z. B. dynamische Geometriesoftware, Konstruktionswerkzeuge, Schere, Papier, Stift, …

Partner- oder Gruppenarbeit

Impulse innerhalb der Gruppe,

Zeit zum Nachdenken

„Schutzraum“ für Irrwege und Sackgassen

Klassengespräch zur Sammlung und Diskussion

klare Argumentationsregeln üben

Zweifel wecken und ausräumen lassen

Hilfen für lernschwache Schüler

„Lernschwach“ heißt hier, dass das nötige Wissensnetzwerk nicht zur Verfügung steht.

- Nutzung der Protokolle aus der Vermutungsfindung und der Beweisideensammlung,
- Texte, die Beweise umgangssprachlich begründet darstellen
- Nutzung einer Beweisfigur oder Skizze,
- Beweispuzzle aus fertigen Argumentationsschritten
  - Reihenfolge bestimmen,
  - überflüssige Argumentationsschritte aussortieren.

Exkurs: Beweisverständnis

1) **Jeden Beweisschritt begründen können.**
   – Axiome und Sätze nennen
2) **Beweisidee in wenigen Worten vermitteln.**
   – auch leicht veränderte Beweisfiguren korrekt nutzen können
3) **Beweisidee übertragen und verallgemeinern**
   – Veränderungen von Voraussetzungen und Behauptungen beurteilen

6) Fazit

Beweise sind nur dann erforderlich, wenn das Beweisbedürfnis bei Schülern geweckt ist.

„Stimmt das?“ → „Wie kommt das?“

Zum Beweisen sind hochgradig vernetzte Informationen nötig: über die Sache und über zulässige Argumente.

Beweisideen erfordern geistigen Frei- und Schutzraum für die Schüler

Der Lehrer fungiert bei der Beweisführung als Instanz für zulässige Argumente und Verknüpfungen.

7) Quellen

[1] Holland, G. (1996): Geometrie in der Sekundarstufe. Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag

[2] Zech, F. (1996): Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim, Basel, Beltz Verlag

[3] Walsch, W (1992): mathematik lehren 51, S. 6ff.

[4] Claus, H.-J. (1989): Einführung in die Didaktik der Mathematik. Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft

[5] Ufer, S. & Heinze, A. (2009): mathematik lehren 155, S. 43ff.