Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Michael Meinhold

Dresden, 18. November 2023

Mathematik für Ingenieure - WS2023/24
Übungsblatt 7

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben durch Variation der Konstanten.

(a) $x \cdot y'(x) - y(x) = x^2 \cdot \cos x,\ \ y(\pi) = 2\pi$

(b) $y'(x) + (\tan x) \cdot y(x) = 5 \cdot \sin(2x)$, Lösungskurve durch Punkt $P(3\pi; 2)$

(c) $x \cdot y'(x) + y(x) = \ln x,\ \ y(1) = 1$

Aufgabe 2: Lösen Sie die die folgenden inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung bzw. Anfangswertprobleme mit Hilfe geeigneter Lösungsansätze oder Variation der Konstanten.

(a) $y' - 2y = 4x - 2,\ \ y(0) = 1$

(b) $y' - 3y = x \cdot \mathrm{e}^{4x},\ \ y(1) = 2,$

(c) $y' - \pi y = \sin x,\ \ y(0) = 0,$

(d) $y' - \frac{y}{x} = x^2,\ \ x \neq 0,$

(e) $y' + \frac{y}{x} = \cos x,\ \ x \neq 0,$

(f) $y' - (\tan x) \cdot y = 2 \sin x.$

Aufgabe 3: Überprüfen Sie, welche der folgenden linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung konstante Koeffizienten besitzen. Unterscheiden Sie diese außerdem nach homogenen und inhomogenen Differentialgleichungen.

(a) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \cos x$

(b) $x \cdot y''(x) - 2y'(x) = 0$

(c) $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$

(d) $2\ddot{x}(t) + x(t) = e^{-2t}$

(e) $y''(x) + y'(x) + x^2 \cdot y(x) = 0$

Aufgabe 4: Zwei Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$x \mapsto y = f_i(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}, \quad i \in \{1, 2\}$$

werden als Basislösungen bezeichnet, wenn

$$W(f_1, f_2)(x_0) := \det \begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{für ein } x_0 \in D$$

d. h. von Null verschieden ist.[1] $W(f_1, f_2)$ heißt Wronski-Determinante.

Untersuchen Sie, ob in den folgenden Beispielen eine Basis vorliegt.

(a) $f_1(x) = \sin(\omega x),\ \ f_2(x) = \cos(\omega x),\ \ f'' + \omega^2 f = 0$ (Schwingungsgleichung)

(b) $f_1(x) = e^{2x},\ \ f_2(x) = e^{-4x},\ \ f'' + 2f' - 8f = 0$

[1] Zwei Basislösungen sind insbesondere linear unabhängig. Gilt hingegen $W(x_0) = 0$ für zwei Lösungen f_1 und f_2 und alle $x_0 \in D$, so folgt hieraus nicht, dass f_1 und f_2 linear abhängig sind.

Aufgabe 5: Gegeben ist eine gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten in der unbekannten Funktion $x \mapsto y(x)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}$

$$y''(x) - 2 \cdot a \cdot y'(x) + \left(a^2 + b^2\right) \cdot y(x) = 0 \tag{1}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ Parameter beschreiben.

Weisen Sie nach, dass die Funktion $f_1 : x \mapsto y = f_1(x)$ mit

$$f_1(x) = \cos(b \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung in Formel (1) für jede Wahl der Parameterwerte a und b ist.

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 6: Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y = f(x) = 4e^{-4x} - \frac{1}{2}x + 4$$

Berechnen Sie $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Gleichung

$$y'' + a \cdot y' + b = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt wird. Hierbei bezeichnen $y'' = f''(x)$ und $y' = f'(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ die erste bzw. zweite Ableitung von f nach x.

Aufgabe 7: Lösen Sie die folgenden trennbaren und/oder linearen Differentialgleichungen:

(a) $y' = \frac{\mathrm{e}^x}{y}$, (b) $x^2 + y - xy' = 0$,

(c) $y' + \sin x = (\tan x)y$, (d) $y' = (y - 3)\cos x$.

Aufgabe 8: Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

(a) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, (b) $y' = \frac{x+3y}{2x}$, (c) $y' = \frac{x-y}{x-2y}$.

Aufgabe 9: Für n reelle Funktionen

$$f_i : D \to \mathbb{R}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

einer reellen Variablen $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ ist die Wronski-Determinante definiert durch

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) := \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{2}$$

worin $f_i^{(j)}(x)$ mit $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ die j-te gewöhnliche Ableitung der Funktion f_i (insbesondere f_i' deren erste Ableitung) bezeichnet.

Speziell sind hier drei über den reellen Zahlen definierte Funktionen

$$f_1 : x \mapsto x, \quad f_2 : x \mapsto \sin x \quad \text{und} \quad f_3 : x \mapsto \cos x \tag{3}$$

gegeben.

(a) Stellen Sie die in Formelnummer (2) dargestellte Matrix für die Funktionen in Formelzeile (3) auf. Berechnen Sie schriftlich die Wronski-Determinante dieser Matrix.

(b) Entscheiden und begründen Sie, ob die Funktionen f_1, f_2 und f_3 aus Formelnummer (3) linear unabhängig auf $\mathbb{R}$ sind.