DIS N2 Nachbereitungsaufgabe

Josua Kowalzik

25. Oktober 2021

1 Aufgabe (a)

1.1 Aufgabenstellung (a)

Auf der Menge der komplexen Zahlen C ist die Abbildung

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) = -1 + i(z-1)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass f injektiv und surjektiv (d.h. bijektiv) ist.

1.2 Lösung (a)

Injektiv:

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ so dass $f(z_1) = f(z_2)$.

Dann gilt also $-1 + i(z_1 - 1) = -1 + i(z_2 - 1)$. Daraus ergibt sich durch Äquivalente Umformungen: $iz_1 - i = iz_2 - i$. Daraus folgt: $z_1 = z_2$.

f ist also injektiv.

Surjektiv:

Zu zeigen: $\forall\ c \in \mathbb{C}\ \exists\ z \in \mathbb{C}\colon f(z) = c$

Beweis. Seien $c, z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = c$

$$\begin{aligned}
& & f(z) &= c \\
\Rightarrow & & -1 + i(z-1) &= c \\
\Rightarrow & & z - 1 &= \frac{c}{i} + \frac{1}{i} \\
\Rightarrow & & z &= \frac{c}{i} + \frac{1}{i} + 1 \\
\Rightarrow & & \forall\ c \in \mathbb{C} \text{ gilt } f\Big(\frac{c}{i} + \frac{1}{i} + 1\Big) = c \text{ mit } \frac{c}{i} + \frac{1}{i} + 1 \in \mathbb{C} &
\end{aligned}$$

f ist also surjektiv □

Bijektiv

Da f sowohl injektiv als auch surjetiv ist, ist f bijektiv.

2 Aufgabe (b)

2.1 Aufgabenstellung (b)

Gegeben sind auf der Menge $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ die zwei Permutationen:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 1 & 2 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} , \quad \beta = (1\ 5\ 4) \circ (1\ 2\ 7\ 8\ 5) \circ (2\ 3\ 10) .$$

- Geben Sie α und β in Zyklenschreibweise an.
- Geben Sie für α und β jeweils alle Fixpunkte an.
- Stellen Sie α als Kompostition von Transpositionen dar.

2.2 Lösung (b)

- Zyklenschreibweise:
  - $\alpha = (1\ 3)\ (2\ 8\ 6\ 9\ 4)\ (5\ 10)$
  - $\beta = (1\ 2\ 3\ 10\ 7\ 8\ 4)$
- Fixpunkte: α: (7) ; β: (5), (6), (9)
- α als Kompostition von Transkriptionen: $\alpha = (1\,3) \circ (2\,8) \circ (8\,6) \circ (6\,9) \circ (9\,4) \circ (5\,10)$