DS Nachbereitungsaufgabe N5

Egan Spencer

TU Dresden — November 2024

N 5

(a)

Anzahl der Teiler von 111111

PFZ(111111):

$$111111 : 2 = 55555 R : 1$$
$$111111 : \boxed{3} = 37037 R : 0$$
$$37037 : 3 = 12345 R : 2$$
$$37037 : 5 = 7407 R : 2$$
$$37037 : \boxed{7} = 5291 R : 0$$
$$5291 : 7 = 755 R : 6$$
$$5291 : \boxed{11} = 481 R : 0$$
$$481 : 11 = 43 R : 8$$
$$481 : \boxed{13} = 37 R : 0$$

$\boxed{37}$ ist prim.

PFZ(111111) $= 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 37^1$

Für: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot (\dots) \cdot p_k^{\alpha_k}$, wobei $k \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, ..., p_k$ Primzahlen mit $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ und $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$T(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\dots) \cdot (\alpha_k + 1)$$

$$T(111111) = (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1)$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$
$$T(111111) = 32$$

(b)

ggT(230,84) in der Form: ggT$(m, n) = a \cdot n + b \cdot m$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$

Mit dem erweitertem euklidischen Algorithmus:
zuerst ggT(230,84) berechnen:

$$230 = 2 \cdot 84 + 62$$
$$84 = 1 \cdot 62 + 22$$
$$62 = 2 \cdot 22 + 18$$
$$22 = 1 \cdot 18 + 4$$
$$18 = 4 \cdot 4 + 2$$
$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$
$$\rightsquigarrow ggT(230, 84) = 2$$

nun rückwärts rechnen um a und b zu bestimmen:

$$2 = ggT(230, 84)$$
$18 = 4 \cdot 4 + 2$ | nach 2 umstellen
$2 = 18 - 4 \cdot 4$ | $4 = 22 - 1 \cdot 18$ einsetzen
$2 = 18 - 4 \cdot (22 - 1 \cdot 18) = 5 \cdot 18 - 4 \cdot 22$ | $18 = 62 - 2 \cdot 22$ einsetzen
$2 = 5 \cdot (62 - 2 \cdot 22) - 4 \cdot 22 = 5 \cdot 62 - 14 \cdot 22$ | $22 = 84 - 1 \cdot 62$ einsetzen
$2 = 5 \cdot 62 - 14 \cdot (84 - 1 \cdot 62) = 19 \cdot 62 - 14 \cdot 84$ | $62 = 230 - 2 \cdot 84$ einsetzen
$$2 = 19 \cdot (230 - 2 \cdot 84) - 14 \cdot 84 = 19 \cdot 230 - 42 \cdot 84$$
$\rightsquigarrow a = -52$ und $b = 19$

$$ggT(230, 84) = 2 = -52 \cdot 84 + 19 \cdot 230$$

(c)

Letzte Ziffer der Zahl 7^{543} mit der Methode "Quadrieren und Multiplizieren":
Letzte Ziffer einer Zahl entspricht modulo 10 der Zahl.
Exponent in Dezimalschreibweise:
$543 = 2^9 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
In Binärschreibweise: 100011111

Tabelle mit Quadrieren (Q) und Multiplizieren (QM):

QM	Q	Q	Q	Q	QM	QM	QM	QM	QM
$1^2 \cdot 7$ $= 7$	7^2 $= 49 \equiv 9$	9^2 $= 81 \equiv 1$	1^2 $= 1$	1^2 $= 1$	$1^2 \cdot 7$ $= 7$	$7^2 \cdot 7$ $= 343 \equiv 3$	$3^2 \cdot 7$ $= 63 \equiv 3$	$3^2 \cdot 7$ $= 63 \equiv 3$	$3^2 \cdot 7$ $= 63 \equiv \boxed{3}$

$7^{543} \mod 10 = 3 \rightsquigarrow$ Die letzte Ziffer ist 3.