LA Nachbereitungsaufgaben N5.2

Egan Spencer

TU Dresden — November 2024

N 5.2

$$x_1 = 5, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 9, x_5 = 1, x_6 = 2, x_7 = 9$$

(a)
$v_1 = (5, 2, 1)^T, v_2 = (9, a, 1)^T, v_3 = (2, 9, a)^T \ v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$

Lineare Abhängigkeit mit einem homogenen LGS mit $A = (v_1, v_2, v_3)$ überprüfen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 9 & 2 & 0 \\ 2 & a & 9 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid -5 \cdot III \\ \mid -2 \cdot III \\ \mid I \leftrightarrow III \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 9-2a & 0 \\ 0 & 4 & 2-5a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid -(a-2) \cdot III \\ \mid \, : 4 \mid II \leftrightarrow III \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2-5a}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 10-5a+\frac{5}{4}a^2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow 0 = 10 - 5a + \frac{5}{4}a^2$$

$0 = 10 - 5a + \frac{5}{4}a^2 \mid : (\frac{5}{4})$
$0 = 8 - 4a + a^2$
$a_{1/2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{(\frac{-4}{2})^2 - 8}$
$a_{1/2} = 2 \pm \sqrt{-4}$

Da $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$ gibt es keine a für welche v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, d.h. v_1, v_2, v_3 sind für alle $a \in \mathbb{R}$ linear unabhängig.

Probe (mit Taschenrechner) für z.B. $a = 0$:

(b)

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i)

z.z.: $F := (A, B, C, D)$ ist eine angeordnete Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$
Beweis: Seien a, b, c, d die Matrizen A, B, C, D in Spaltenvektorform:
$a = (0, 1, 0, 0)^T, b = (1, 0, 0, 1)^T, c = (1, 0, 1, 0)^T, d = (1, 1, 1, 1)^T$
lineare Unabhängigkeit mittels eines homogenen LGS überprüfen mit $U := \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid I \leftrightarrow II \\ \\ \\ \mid III \leftrightarrow IV \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid -II \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot(-1) \\ \mid -III \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{r} \mid -IV \\ \mid -III \mid -IV \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Da keine Nullzeile entsteht und alle Spalten Pivotspalten sind, sind a, b, c, d und somit auch A, B, C, D linear unabängig und bilden ein minimales Erzeugendensystem. F stellt somit die Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dar, da man alle Matrizen als Linearkombination von A, B, C, D in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bilden kann.

□

$$\dim(\mathbb{R}^{m\times n}) = m \cdot n$$
$$\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 2 \cdot 2 = 4$$

(ii)

$$M := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ in Spaltenvektorform } m = (9, 1, 2, 9)^T$$

$$M_F = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$m = (a, b, c, d) \cdot m_F = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid I \leftrightarrow II \\ \\ \\ \mid III \leftrightarrow IV \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid -II \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot(-1) \\ \mid -III \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{r} \mid -IV \\ \mid -III \mid -IV \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightsquigarrow x_1 = -1 \\ \rightsquigarrow x_2 = 7 \\ \rightsquigarrow x_3 = 0 \\ \rightsquigarrow x_4 = 2 \end{array}$$

$$m_F = (-1, 7, 0, 2)^T \text{ und } M_F = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

(iii)

$$\tilde{F} := (B, C, D, M) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ mit } \tilde{U} = (b, c, d, m)$$

z.z.: Tupel $\tilde{F}$ ist auch eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Beweis: wie in (i) die lineare Unabhängigkeit mittels eines homogenen LGS überprüfen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid -I \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid II \leftrightarrow IV \\ \\ \mid \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid -II \mid -IV \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid -II \\ \\ \mid III \leftrightarrow IV \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid -III \mid -8 \cdot IV \\ \\ \mid -IV \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Wie in (i) entsteht keine Nullzeile und alle Spalten sind Pivotspalten, somit bildet auch das Tupel $\tilde{F}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

$\square$