LAG N3.2 Hausaufgabe

Josua Kowalzik

3. November 2021

1 Aufgabenstellung

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 6}$ und die Vektoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie das homogene Gleichungsszstem $Ax = 0$.

(b) Geben Sie für die inhomogenen Gleichungssysteme $Ax = b$ bzw. $Ax = c$ jeweils die Menge der Lösungen an.

2 Lösung

Um Redundanz zu vermeiden kann man alle drei LGS gleichzeitig lösen indem man die drei verschiedenen Ergebnisse $0, b$ und c in der Matrix nebeneinander schreibt:

$$(A \mid 0 \mid b \mid c) \tag{1}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c|c|c} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} z_3 + 3z_2 \rightsquigarrow z_3 \\ z_1 + 5z_2 \rightsquigarrow z_2 \end{array} \tag{2}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c|c|c} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & -2 & -1 & 5 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & -2 & -1 & 5 & 0 & 13 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} z_3 - z2 \rightsquigarrow z_3 \\ z_2 \div 6 \rightsquigarrow z_2 \end{array} \tag{3}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c|c|c} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & \frac{13}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad z_1 - z2 \rightsquigarrow z_1 \tag{4}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c|c|c} 5 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{10}{3} & \frac{25}{6} & -\frac{5}{6} & 0 & -\frac{25}{6} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & \frac{13}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad z_1 \div 5 \rightsquigarrow z_1 \tag{5}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c|c|c} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & \frac{13}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \tag{6}$$

Aus der letzten Matrix lassen sich nun die Lösungen für alle drei LGS ablesen:

$$Ax = 0\colon \qquad \mathbb{L} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 = -\frac{1}{6}a - \frac{2}{3}b - \frac{5}{6}c + \frac{1}{6}d, \\ x_2 = -\frac{7}{6}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c - \frac{5}{6}d, \\ x_3 = a,\ x_4 = b,\ x_5 = c,\ x_6 = d \end{array} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Ax = b\colon \qquad \mathbb{L} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 = -\frac{1}{6}a - \frac{2}{3}b - \frac{5}{6}c + \frac{1}{6}d - \frac{5}{6}, \\ x_2 = -\frac{7}{6}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c - \frac{5}{6}d + \frac{13}{6}, \\ x_3 = a,\ x_4 = b,\ x_5 = c,\ x_6 = d \end{array} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Ax = c\colon \qquad \mathbb{L} = \emptyset$$